

UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ BYSTRICI
FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

Pravdepodobnostné rozdelenia v poistnej matematike

bakalárska práca

75ed6693-0d6a-422a-8f13-89f9c128155e

Študijný program: 9.1.1 Matematika

Študijný odbor: 9.1.1 Matematika

Katedra: matematiky

Vedúci bakalárskej práce: Vladimír Špitalský

Stupeň kvalifikácie: bakalár (v skratke "Bc.")

Dátum odovzdania práce: 13.5.2011

Dátum obhajoby:

Banská Bystrica 2011

Alena Hupcejová

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som bakalársku prácu napísala samostatne pod odborným vedením vedúceho bakalárskej práce Vladimíra Špitalského, pričom som používala literatúru uvedenú v závere práce.

V Banskej Bystrici, 12. 5 . 2011

PodĎakovanie

Na tomto mieste sa chcem poĎakovať vedúcemu bakalárskej práce Vladimírovi Špitalskému za odbornú pomoc, cenné rady, konštruktívne pripomienky, venovaný čas a trpezlivý prístup počas tvorby tejto práce. Taktiež sa chcem poĎakovať všetkým ostatným, ktorí mi pomáhali pri kontrole práce a podporovali ma.

Abstrakt

ALENA HUPCEJOVÁ: Pravdepodobnostné rozdelenia v poistnej matematike.

Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Fakulta prírodných vied,

Katedra matematiky.

Vedúci práce: Vladimír Špitalský

Bakalárska práca. Banská Bystrica, 2011. 70 strán.

Práca popisuje vybrané rozdelenia pravdepodobnosti, nachádzajúce uplatnenie v poistnej matematike pri modelovaní počtu a výšky nárokov. Pre každú distribúciu sú v práci odvodené jej základné charakteristiky: stredná hodnota, rozptyl a šikmosť. Väčšinou sú vzorce odvodené dvoma spôsobmi: jednak priamo na základe definície, jednak pomocou momentovej či kumulantovej vytvárajúcej funkcie. Pre každé rozdelenie sme znázornili príslušnú pravdepodobnostnú funkciu alebo hustotu pre rôzne hodnoty parametrov.

Abstract

ALENA HUPCEJOVÁ: Probability distributions in insurance mathematics.

Matej Bel University in Banská Bystrica, Faculty of Natural Sciences,

Department of Mathematics.

Supervisor: Vladimír Špitalský

Bachelor Thesis. Banská Bystrica, 2011. 70 pages.

This work deals with selected probability distributions which can be used in actuarial mathematics for modelling number and size of claims. For each of the distributions we derive its basic characteristics like mean, variance and skewness. Often we compare derivation based on the definition of the characteristics with another one using moment (cumulant) generating functions. For every distribution we plot its probability mass function or density function for different values of parameters.

Obsah

Úvod	6
1 Úvod do teórie pravdepodobnosti	7
1.1 Pravdepodobnosť	7
1.2 Náhodná premenná	8
1.2.1 Distribučná funkcia	8
1.2.2 Stredná hodnota	9
1.2.3 Rozptyl	10
1.2.4 Koeficient šikmosti	10
1.3 Momentová vytvárajúca funkcia	11
1.4 Kumulantová vytvárajúca funkcia	12
1.5 Nezávislosť	13
2 Diskrétna rozdelenia	14
2.1 Alternatívne (Bernoulliho) rozdelenie	14
2.2 Binomické rozdelenie	20
2.3 Poissonovo rozdelenie	25
2.4 Geometrické rozdelenie	29
2.5 Negatívne binomické rozdelenie	34
3 Spojité rozdelenia	41
3.1 Normálne rozdelenie	42
3.2 Rovnomerné rozdelenie	47
3.3 Exponenciálne rozdelenie	53
3.4 Gamma rozdelenie	58
3.5 Paretove rozdelenie	64
Záver	69
Zoznam bibliografických odkazov	70

Úvod

Poistná matematika má svoje využitie pri odhade typu rozdelenia údajov zozberaných poisťovňou za určité obdobie. Poznať správne rozdelenie je veľmi dôležité preto, aby sme mohli čo najpresnejšie odhadnúť budúce plnenia poisťovne. Táto činnosť zohráva podstatnú úlohu pri stanovení výšky poistného, čo môže výrazne ovplyvniť existenciu danej inštitúcie z dôvodu zlej predikcie potrebného imania.

Práca s názvom Pravdepodobnostné rozdelenia v poistnej matematike obsahuje prehľad vybraných rozdelení využiteľných v poisťovníctve. Práca popisuje použitie jednotlivých rozdelení a vyjadrenia ich príslušných charakteristík. Odvodenia charakteristík sme realizovali hlavne pomocou momentovej/kumulantovej vytvárajúcej funkcie, pričom sme často uviedli aj "klasický" spôsob odvodenia. Snažili sme sa uprednostniť prehľadnosť na úkor stručnosti.

Prácu sme rozdelili do troch kapitol. V prvej kapitole sme uviedli základné definície a vzťahy, z ktorých sme v tejto práci vychádzali.

Druhá kapitola obsahuje diskrétna rozdelenia, ktoré možno využiť na modelovanie počtu poistných plnení ako je alternatívne (Bernoulliho) rozdelenie, binomické, Poissonovo rozdelenie, geometrické a negatívne binomické rozdelenie. Pri každom z týchto rozdelení sme uviedli ich stručný popis a odvodenie ich charakteristík. V závere každého rozdelenia sme graficky znázornili závislosť tvaru rozdelenia (pravdepodobnostnej funkcie, resp. hustoty) od hodnôt príslušných parametrov; všetky grafy boli vytvorené v štatistickom programe *R*.

V tretej kapitole sme popísali spojité rozdelenia ako je normálne rozdelenie, rovnomerné, Paretovo rozdelenie, exponenciálne a nakoniec gamma rozdelenie. Tie sú vhodné pri modelovaní výšky jednotlivých, resp. celkových poistných plnení poisťovne. Štruktúra textu je analogická ako v druhej kapitole.

Kapitola 1

Úvod do teórie pravdepodobnosti

V tejto kapitole uvedieme základné pojmy teórie pravdepodobnosti, ktoré budeme v práci využívať. Dôležité pojmy zavedieme pomocou definícií a ich príslušné vlastnosti uvedieme vo vetách. Ich dôkazy nebudeme uvádzať, čitateľ ich môže nájsť napríklad v práci Štěpána a Zváru [2].

1.1 Pravdepodobnosť

Pojem pravdepodobnosť si môžeme predstaviť ako zobrazenie, ktoré priradí výsledkom náhodného pokusu reálne číslo z intervalu $(0, 1)$, t.j. ich príslušné pravdepodobnosti.

Teraz uvedieme axiomatickú definíciu pravdepodobnosti, aby sme si určili presne, čo daný pojem predstavuje, a tak predišli prípadným nezrovnalostiam.

Definícia 1.1 *Nech Ω je neprázdna množina a $\mathcal{S}$ je σ -algebra náhodných javov definovaných na Ω . **Pravdepodobnosťou** nazývame reálnu funkciu $P : \mathcal{S} \rightarrow (0, 1)$ také, že pre $\forall A \in \mathcal{S}$, pre $\forall$ disjunktné $A, A_1, A_2, \dots$ platí:*

$$P(A) \geq 0 \tag{1.1}$$

$$P(\Omega) = 1 \tag{1.2}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \tag{1.3}$$

*Trojicu $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ nazývame **pravdepodobnostný priestor**.*

Túto definíciu zaviedol Kolmogorov v roku 1933, čím prvý krát určil vlastnosti pravdepodobnosti všeobecne, keďže pravdepodobnosť vyjadril ako mieru na σ -algebre. Pred jej zavedením boli zavedené definície (štatistická-klasická, geometrická) popisujúce len špeciálne prípady axiomatickej definície.

1.2 Náhodná premenná

Náhodnú premennú X možno definovať ako merateľnú reálnu funkciu definovanú na Ω .

Definícia 1.2 *Majme pravdepodobnostný priestor (Ω, S, P) . Reálna funkcia X definovaná na Ω , pre ktorú platí*

$$x \in \mathbb{R} \implies X^{-1}((-\infty, x)) \in S,$$

*sa nazýva **náhodná premenná**.*

Poznámka 1.3 *Množinová funkcia $P_X : S \rightarrow [0, 1]$ sa nazýva **rozdelenie pravdepodobnosti** náhodnej premennej X .*

1.2.1 Distribučná funkcia

Definícia 1.4 *Nech X je náhodná premenná. **Distribučná funkcia** X je funkcia $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, pre ktorú platí*

$$F_X(x) = P([X \leq x]). \quad (1.4)$$

Veta 1.5 *Distribučná funkcia F_X je reálna funkcia, ktorá je*

- (a) sprava spojitá*
- (b) neklesajúca*
- (c) a v limitných prípadoch nadobúda takéto hodnoty:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1.$$

Každá funkcia s týmito vlastnosťami je distribučnou funkciou nejakej náhodnej premennej.

Najčastejšie sa stretávame s:

- diskkrétne rozdelenie - premenná nadobúda iba hodnoty zo spočítateľnej množiny $x_1, x_2, \dots$.
- spojité rozdelenie - viď definíciu 1.6

Definícia 1.6 Náhodná premenná X má spojité rozdelenie, ak existuje nezáporná funkcia $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pre ktorú platí

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt, \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Funkciu f_X nazývame **hustota pravdepodobnosti** náhodnej premennej X .

Veta 1.7 Nech F je distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X , f_X je jej hustota pravdepodobnosti a $a, b \in \mathbb{R}$, pričom $a < b$. Potom

$$f_X \geq 0 \quad (1.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1 \quad (1.7)$$

$$\int_a^b f_X(t)dt = F_X(a) - F_X(b). \quad (1.8)$$

1.2.2 Stredná hodnota

Jednou zo základných charakteristík polohy náhodnej premennej je stredná hodnota. Intuitívne by sme ju mohli prirovnať k priemeru hodnôt náhodnej premennej.

Definícia 1.8 Strednou hodnotou náhodnej premennej X nazývame číslo (ak existuje)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF_X(x). \quad (1.9)$$

Veta 1.9 Nech náhodná premenná má strednú hodnotu. Potom platí

a) Ak X je diskrétna a nadobúda hodnoty $x_1, x_2, \dots$ s pravdepodobnosťami $p_1, p_2, \dots$, tak

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i. \quad (1.10)$$

b) Ak X je spojité, tak

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx. \quad (1.11)$$

Teda napríklad, ak X je degenerovaná náhodná premenná (t.j. X nadobúda jedinu hodnotu x_1), tak $E(X) = x_1$.

Veta 1.10 *Nech X je náhodná premenná, ktorej stredná hodnota existuje. Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

$$E(a + bX) = a + bE(X). \quad (1.12)$$

Veta 1.11 *Nech X je náhodná premenná a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je borelovská funkcia. Potom*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot F_X(x). \quad (1.13)$$

Špeciálne, ak X je diskrétna resp. spojitá, tak

$$E(X) = \sum_{\infty} g(x) \cdot f_X(x),$$

resp.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x).$$

1.2.3 Rozptyl

Rozptyl je charakteristikou variability, čiže vyjadruje mieru náhodného kolísania hodnôt náhodnej premennej okolo jej strednej hodnoty.

Definícia 1.12 *Nech X je náhodná premenná s $E(X^2) < \infty$. Potom hodnotu*

$$D(X) = E(X - E(X))^2 \quad (1.14)$$

*nazývame **rozptylom** (disperziou, varianciou) náhodnej premennej. Odmocninu z rozptylu nazývame **štandardná odchýlka**:*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Veta 1.13 *Pre rozptyl platí*

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X). \quad (1.15)$$

Veta 1.14 *Nech X je náhodná premenná, ktorej rozptyl existuje. Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

$$D(a + bX) = b^2 D(X). \quad (1.16)$$

1.2.4 Koeficient šikmosti

Táto charakteristika vyjadruje asymetrickosť rozdelenia. Rozlišujeme ľavostranné zošikmenie ($\gamma(X) > 0$) a pravostranné zošikmenie ($\gamma(X) < 0$).

Predtým ako uvedieme jeho definíciu vysvetlíme pojem centrálny moment. Všeobecné zavedenie pojmu moment je v nasledujúcej podkapitole (kap. 1.3).

Definícia 1.15 *Nech X je náhodná premenná. Charakteristiku (pokiaľ existuje)*

$$\mu_k(X) = E[(X - E[X])^k], \quad (1.17)$$

*nazývame **k-tý centrálny moment** náhodnej premennej X .*

Definícia 1.16 *Nech X je nedegenerovaná a má konečný tretí centrálny moment. Potom jej charakteristiku vyjadrenú v tvare*

$$\gamma(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} \quad (1.18)$$

nazývame koeficientom šikmosti.

1.3 Momentová vytvárajúca funkcia

Pred samotnou definíciou momentovej vytvárajúcej funkcie definujeme **k-tý začiatočný moment**.

Definícia 1.17 *Nech X je náhodná premenná s konečnou strednou hodnotou. Potom charakteristiku tvaru*

$$m_k(X) = E(X^k) \quad \text{pre } k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

*nazývame **začiatočný k-tý moment** náhodnej premennej X .*

Definícia 1.18 *Momentovou vytvárajúcou funkciou nazývame reálnu funkciu náhodnej premennej X s parametrom t danú vzťahom*

$$M_X(t) = E[e^{tX}]. \quad (1.20)$$

Nasledujúca veta vyjadruje vzťah momentovej vytvárajúcej funkcie a začiatočných momentov.

Veta 1.19 *Nech je momentová funkcia M_X konečná na nejakom intervale $(-\epsilon, \epsilon)$ bodu 0 a nech $k \in \mathbb{N}$. Potom k-tý všeobecný moment je konečný a platí*

$$\frac{d^k}{dt^k} M_X(0) = m_k. \quad (1.21)$$

Naviac platí

$$M_X(0) = 1. \quad (1.22)$$

Idea dôkazu predošlej vety je nasledovná: Taylorov rozvoj funkcie e^x je

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Ak za x dosadíme $t \cdot X$, máme:

$$e^{t \cdot X} = 1 + \frac{t \cdot X}{1!} + \frac{t^2 \cdot X^2}{2!} + \frac{t^3 \cdot X^3}{3!} + \dots \quad (1.23)$$

Aplikujeme na tento rozvoj (1.23) strednú hodnotu. Dostaneme

$$E(e^{t \cdot X}) = 1 + \frac{t \cdot m_1}{1!} + \frac{t^2 \cdot m_2}{2!} + \frac{t^3 \cdot m_3}{3!} + \dots, \quad (1.24)$$

kde $m_1, m_2, \dots$ sú všeobecné momenty X .

Takto sme dostali rozvoj momentovej funkcie do mocninového radu. Z jednoznačnosti takéhoto rozvoja máme, že musí ísť o Taylorov rozvoj $M_X(t)$ v bode 0

$$M_X(t) = M_X(0) + \frac{M'_X(0)}{1!} \cdot t + \frac{M''_X(0)}{2!} \cdot t^2 + \dots \quad (1.25)$$

Teda

$$M_X(0) = 1, \quad M'_X(0) = m_1, \quad M''_X(0) = m_2, \dots$$

1.4 Kumulantová vytvárajúca funkcia

Momentovú funkciu možno podľa Vety 1.19 využiť na výpočet začiatočných momentov a pomocou nich možno vyjadriť centrálnu. Na výpočet prvých centrálnych momentov je však často výhodnejšia takzvaná kumulantová funkcia.

Definícia 1.20 *Kumulantová vytvárajúca funkcia je funkcia vyjadrená v tvare*

$$\kappa_X(t) = \ln M_X(t) = \ln (E [e^{t \cdot X}]) \quad (1.26)$$

Veta 1.21 *Nech X je náhodná premenná s momentovou funkciou $M_X(t)$. Potom pre jej centrálnu momenty platí*

$$\kappa'_X(0) = \mu_1, \quad \kappa''_X(0) = \mu_2, \quad \kappa'''_X(0) = \mu_3, \quad \kappa^{iv}_X(0) = \mu_4 - 3\mu_2^2.$$

Dôsledok 1.22 *Ak má X kumulantovú funkciu F_X , tak pre jej šikmost platí:*

$$\gamma(X) = \frac{\kappa'''_X(0)}{\sqrt{[\kappa''_X(0)]^3}}.$$

1.5 Nezávislosť

Veta 1.23 Ak $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú združené nezávislé náhodné premenné, tak potom platí

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t). \quad (1.27)$$

Ak navyše $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú rovnako rozdelené, tak

$$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = [M_{X_1}(t)]^r. \quad (1.28)$$

Dôkaz. Vychádzame z Definície 1.18.

$$\begin{aligned} M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) &= E[e^{t \cdot (X_1+X_2+\dots+X_n)}] \\ &= E[e^{t \cdot X_1 + t \cdot X_2 + \dots + t \cdot X_n}] \\ &= E[e^{t \cdot X_1}] \cdot E[e^{t \cdot X_2}] \cdot \dots \cdot E[e^{t \cdot X_n}] \\ &= M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t). \end{aligned} \quad \square$$

Veta 1.24 Nech X a Y sú náhodné premenné, pre ktoré existujú momentové funkcie $M_X(t)$, $M_Y(t)$ na nejakom okolí $(-\epsilon, \epsilon)$ bodu 0. Nech existuje reálne číslo r také, že

$$M_Y(t) = [M_X(t)]^r \quad \text{pre } t \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (1.29)$$

Potom

$$E(Y) = r \cdot E(X) \quad (1.30)$$

$$D(Y) = r \cdot D(X) \quad (1.31)$$

$$\gamma(Y) = \frac{\gamma(X)}{\sqrt{r}}. \quad (1.32)$$

Dôkaz.

Pre kumulantové funkcie platí

$$\kappa_Y(t) = r \cdot \kappa_X(t),$$

takže pre všetky $k \geq 0$ máme

$$\frac{d^k}{dt^k} \kappa_Y(0) = r \cdot \frac{d^k}{dt^k} \kappa_X(0).$$

Odtiaľ a z (1.21) máme požadované rovnosti. $\square$

Kapitola 2

Diskrétnne rozdelenia

2.1 Alternatívne (Bernoulliho) rozdelenie

Alternatívne rozdelenie, nazývané aj Bernoulliho rozdelenie po švajčiarskom matematikovi Jacobovi Bernoulli, modeluje realizácie náhodného pokusu, pri ktorom možno získať len dva možné výsledky, a to úspech a neúspech. Pravdepodobnosť úspechu označme p , potom pravdepodobnosť neúspechu je $1 - p$.

Po priradení hodnôt 0 pre neúspech a 1 pre úspech vidíme, že príslušná náhodná premenná nadobúda buď hodnotu 0 alebo 1, z čoho sa odvodilo pomenovanie tohto rozdelenia. Taktiež sa môžeme stretnúť s názvom nula-jednotkové rozdelenie.

Jediným parametrom tohto rozdelenia je pravdepodobnosť, že sledovaná udalosť nastala po vykonaní náhodného pokusu, ktorý sme označili písmenom p , $p \in (0, 1)$.

Presné zavedenie tohto rozdelenia je uvedené v nasledovnej definícii.

Definícia 2.1 *Hovoríme, že náhodná premenná X má **alternatívne rozdelenie** s parametrom p vtedy, keď platí*

$$P(X = k) = p^k \cdot (1 - p)^{1-k} \quad \text{pre } k = 0, 1. \quad (2.1)$$

Veta 2.2 *Nech náhodná premenná X má alternatívne rozdelenie, $X \sim \text{Alt}(p)$. Potom jej stredná hodnota, rozptyl a šikmosť sú*

$$E(X) = p, \quad (2.2)$$

$$D(X) = p \cdot (1 - p), \quad (2.3)$$

$$\gamma(X) = \frac{1 - 2p}{\sqrt{p(1 - p)}}. \quad (2.4)$$

Dôkaz. Odvodzovať budeme podľa známych vzťahov pre strednú hodnotu (1.10), rozptyl (1.14) a šikmosť (1.18), ktoré sme uviedli v prvej kapitole. Začneme strednou hodnotou.

$$E(X) = \sum_{i=0}^1 x_i \cdot p_i = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

Teraz vyjadríme hodnotu rozptylu. Pre názornosť a ľahšie pochopenie nevynechávame žiaden medzikrok, aj keď niektoré sú zrejmé.

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=0}^1 [x_i - E(X)]^2 \cdot p_i = \sum_{i=0}^1 [x_i - p]^2 \cdot p_i \\ &= [0 - p]^2 \cdot (1-p) + [1 - p]^2 \cdot p \\ &= p^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p \\ &= p \cdot (1-p) \cdot [p + (1-p)] \\ &= p \cdot (1-p). \end{aligned}$$

Toto bolo odvodenie na základe definície. Využitím vzťahu (1.15) dostávame jednoduchší spôsob odvodovania:

$$E(X^2) = \sum x_i^2 \cdot p_i = p$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p \cdot (1-p).$$

Na šikmosť potrebujeme tretí začiatočný moment:

$$E[X^3] = \sum x_i^3 \cdot p_i = p.$$

Tretí centrálny moment je

$$E[(X - EX)^3] = E[X^3] - 3 \cdot E[X^2] \cdot E[X] + 2 \cdot [EX]^3 = p - 3p^2 + 2p^3.$$

Takže šikmosť je:

$$\gamma(X) = \frac{E[(X - EX)^3]}{\sqrt{D^3(X)}} = \frac{p - 3p^2 + 2p^3}{p \cdot (1-p) \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)}} = \frac{1 - 2p}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

□

Ukážeme iný spôsob odvodovania základných charakteristík, a to pomocou momentovej, resp. kumulantovej funkcie. Z definície momentovej funkcie jednoducho máme:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E[e^{t \cdot X}] \\
&= \sum_{i=0}^1 e^{t \cdot i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{1-i} \\
&= e^{t \cdot 0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{1-0} + e^{t \cdot 1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{1-1} \\
&= e^0 \cdot 1 \cdot (1-p) + e^t \cdot p \cdot (1-p)^0 \\
&= (1-p) + p \cdot e^t \\
&= 1-p + p \cdot e^t.
\end{aligned}$$

Takto sme ukázali nasledovnú vetu.

Veta 2.3 *Ak $X \sim \text{Bin}(n, p)$, tak jej momentová funkcia je*

$$M_X(t) = 1 - p + p \cdot e^t.$$

Dôkaz. (Iný dôkaz Vety 2.2.)

Najprv derivovaním momentovej funkcie podľa premennej t odvodíme strednú hodnotu.

$$\frac{d}{dt} M_x(t) = \frac{d}{dt} (1 - p + p \cdot e^t) = p \cdot e^t. \quad (2.5)$$

Po dosadení $t = 0$ máme:

$$E(X) = p \cdot e^t|_{t=0} = p \cdot e^0 = p. \quad (2.6)$$

Na ukážku odvodíme strednú hodnotu aj s použitím kumulantomvej funkcie na základe vzťahu (1.26):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \kappa_x(t) &= \frac{d}{dt} \ln(1 - p + p \cdot e^t) \\
&= \frac{1}{1 - p + p \cdot e^t} \cdot \frac{d}{dt} (1 - p + p \cdot e^t) \\
&= \frac{1}{1 - p + p \cdot e^t} \cdot p e^t.
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Dosadením $t = 0$ máme

$$E(X) = \frac{d}{dt} \kappa_X(0) = \frac{1}{1 - p + p \cdot e^0} \cdot p \cdot e^0 = p.$$

Prejdeme na hodnotu rozptylu. Tú získame z druhej derivácie kumulantomvej funkcie.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\kappa_x(t) &= \frac{d}{dt} \frac{pe^t}{pe^t - p + 1} \\
&= \frac{pe^t \cdot (pe^t - p + 1) - pe^t \cdot pe^t}{(pe^t - p + 1)^2} \\
&= \frac{(1 - p) \cdot pe^t}{(pe^t - p + 1)^2}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Teda po dosadení $t = 0$ dostaneme:

$$D(X) = p \cdot (1 - p).$$

Zostáva nám už len ukázať, ako sa dá vyjadriť šikmosť alternatívneho rozdelenia pomocou kumulantovej funkcie. Vzťah (1.18) pre jej výpočet sme uviedli v prvej kapitole. Najprv odvodíme tretí centrálny moment, teda hodnotu čitateľa výrazu 1.18.

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dt^3}\kappa_x(t) &= p \cdot (1 - p) \cdot \frac{d}{dt} \frac{e^t}{(pe^t - p + 1)^2} \\
&= p(1 - p) \frac{e^t \cdot (pe^t - p + 1)^2 - 2p(1 - p)e^t(pe^t - p + 1) \cdot pe^t}{(pe^t - p + 1)^4} \\
&= \frac{p(1 - p)e^t(pe^t - p + 1) \cdot [pe^t - p + 1 - 2pe^t]}{(pe^t - p + 1)^4} \\
&= \frac{p(1 - p)e^t(-pe^t - p + 1)}{(pe^t - p + 1)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_3(X) &= \frac{p(1 - p)e^t(-pe^t - p + 1)}{(pe^t - p + 1)^3} \Big|_{t=0} = \frac{p(1 - p)(-p - p + 1)}{(p - p + 1)^3} \\
&= p(1 - p)(1 - 2p).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

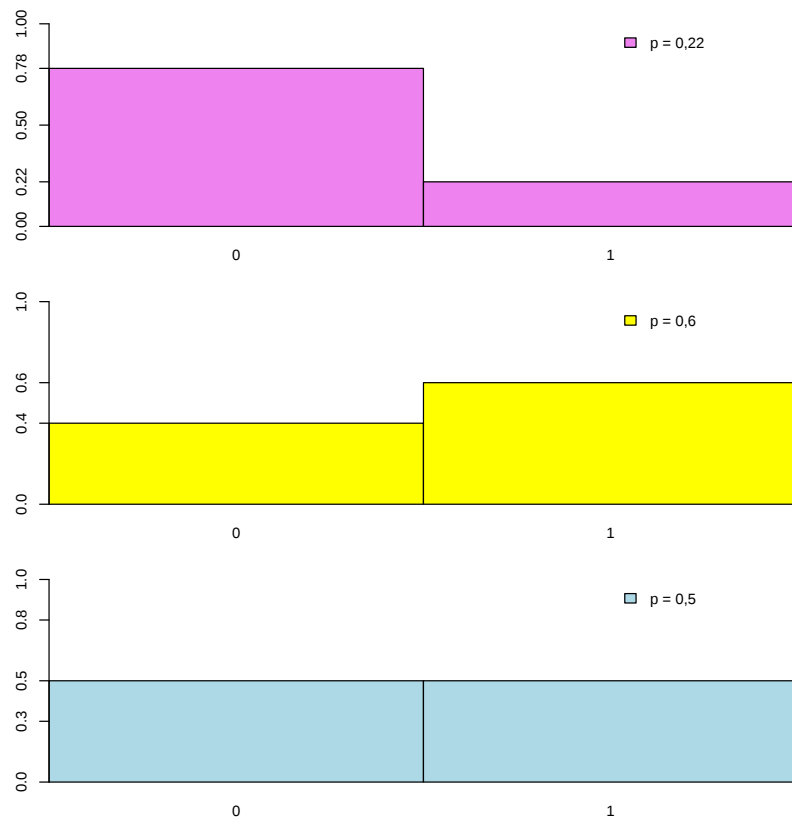
$$\begin{aligned}
[\sigma(X)]^3 &= \sqrt{p(1 - p)} \cdot \sqrt{p(1 - p)} \cdot \sqrt{p(1 - p)} \\
&= p \cdot (1 - p) \cdot \sqrt{p(1 - p)}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

A teraz dosadíme hodnoty čitateľa (2.9) a menovateľa (2.10) do vzťahu (1.18).

$$\begin{aligned}
\gamma(X) &= \frac{p(1-p)(1-2p)}{p(1-p)\sqrt{p(1-p)}} \\
&= \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}.
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

Takto sme ukázali, ako možno využiť kumulantovú funkciu na výpočty vybraných charakteristík pre alternatívne rozdelenie. $\square$

V ďalšom texte už budeme vychádzať len z derivácií momentovej a kumulantovej funkcie. Len pri tomto rozdelení sme vyjadrovali charakteristiky aj cez známe vzťahy (1.10) a (1.14). Robili sme tak preto, aby čitateľ vedel, čo sme vo výpočtoch nahradili a taktiež preto, aby bolo vidieť, o aké zjednodušenie v odvodzovaní sme sa pokúsili.



Obrázok 2.1: Alternatívne rozdelenie s rozdielnymi parametrami

Príslušný zdrojový kód

```
par(mfrow=c(3,1), cex=0.79)
par(mar=c(2, 4, 2, 0.5))
barplot(dbinom(0:1, 1, 0.22), ylim=0:1, names=0:1, space=0, col="violet",
        yaxt="n", xaxs="i")
axis(2, c(0, 0.22, 0.5, 0.78, 1))
legend(x=1.5, y=1, legend=c("p = 0,22"), fill=c("violet"), bty="n")
barplot(dbinom(0:1, 1, 0.6), space=0, ylim=0:1, names=0:1, col="yellow",
        xaxs="i", yaxt="n")
axis(2, c(0, 0.4, 0.6, 1))
legend(x=1.5, y=1, legend=c("p = 0,6"), fill=c("yellow"), bty="n")
barplot(dbinom(0:1, 1, 0.5), names=0:1, space=0, ylim=0:1, col="lightblue",
        yaxt="n", xaxs="i")
axis(2, c(0, 0.3, 0.5, 0.8, 1))
legend(x=1.5, y=1, legend=c("p = 0,5"), fill=c("lightblue"), bty="n")
```

2.2 Binomické rozdelenie

Binomické rozdelenie vyjadruje počet úspechov v postupnosti n nezávislých pokusov, v ktorých náhodná premenná nastáva s pravdepodobnosťou p a nenastáva s pravdepodobnosťou $1 - p$. Dôležité je uvedomiť si, že p je v každom pokuse rovnaké. A tiež, že ide o nezávislé pokusy.

Definícia 2.4 *Náhodná premenná X má binomické rozdelenie s parametrami n, p , pričom $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0, 1)$, práve vtedy, ak jej pravdepodobnostná funkcia má tvar*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}; \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

Veta 2.5 *Momentová vytvárajúca funkcia M_X náhodnej premennej s binomickým rozdelením je funkcia vyjadrená v tvare*

$$M_X(t) = (1 - p + p \cdot e^t)^n = (1 - p \cdot (1 - e^t))^n. \quad (2.13)$$

Dôkaz. V tomto dôkaze si najprv odvodíme momentovú funkciu, aby sme s ňou mohli ďalej pracovať. Vychádzame zo vzťahu (1.20).

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^n e^{t \cdot k} \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \\ &= e^{t \cdot 0} \cdot \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{n-0} + e^{t \cdot 1} \cdot \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1 - p)^{n-1} \\ &\quad + e^{t \cdot 2} \cdot \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{n-2} + \dots + e^{t \cdot n} \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot (1 - p)^{n-n} \\ &= (1 - p)^n + \binom{n}{1} e^t \cdot n \cdot p \cdot (1 - p)^{n-1} \\ &\quad + \binom{n}{2} e^{2t} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} e^{t \cdot n} \cdot p^n \\ &= 1 \cdot (1 - p)^n + n \cdot (1 - p)^{n-1} \cdot e^t \cdot p \\ &\quad + \binom{n}{2} \cdot (1 - p)^{n-2} \cdot (e^t \cdot p)^2 + \dots + 1 \cdot (e^t \cdot p)^n \end{aligned}$$

Pre zjednodušenie zavedieme substitúciu:

$$\begin{aligned} a &= (1 - p) \\ b &= e^t \cdot p, \end{aligned}$$

čím dostaneme vyjadrenie známeho vzťahu v najpoužívanejšom tvare

$$\binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n = (a+b)^n$$

Použitím spätnej substitúcie získame príslušnú momentovú funkciu

$$M_X(t) = (1 - p + p \cdot e^t)^n = (1 - p \cdot (1 - e^t))^n. \quad \square$$

Veta 2.6 *Nech náhodná premenná má binomické rozdelenie, $X \sim Bi(n, p)$. Potom jej stredná hodnota, rozptyl a šikmosť sú*

$$E(X) = np, \quad (2.14)$$

$$D(X) = np \cdot (1 - p), \quad (2.15)$$

$$\gamma(X) = \frac{1 - 2p}{\sqrt{np(1 - p)}}. \quad (2.16)$$

Dôkaz. Najskôr odvodíme strednú hodnotu pomocou momentovej funkcie.

$$\frac{d}{dt} M_x(t) = n \cdot (pe^t - p + 1)^{n-1} \cdot pe^t.$$

Dosadíme $t = 0$, čím dostaneme

$$E(X) = n \cdot (pe^t - p + 1)^{n-1} \cdot pe^t|_{t=0} = n \cdot (p - p + 1)^{n-1} \cdot p = np.$$

Vidíme, že sme v odvodzovaní postupovali správne, dospeli sme k tomu istému výsledku, aký uvádza Veta 2.6. Strednú hodnotu môžeme odvodiť aj pomocou kumulantovej funkcie:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \ln [(pe^t - p + 1)^n] \\ &= \frac{1}{(pe^t - p + 1)^n} \cdot n \cdot (pe^t - p + 1)^{n-1} \cdot pe^t \\ &= \frac{npe^t}{pe^t - p + 1}. \end{aligned}$$

Dosadíme $t = 0$:

$$\frac{npe^t}{pe^t - p + 1}|_{t=0} = \frac{np}{p - p + 1} = np.$$

Aj s jej využitím dostávame rovnaký výsledok ako v predošlom prípade. Zostáva nám vyjadriť rozptyl.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} \kappa_X t &= \frac{d}{dt} \frac{npe^t}{pe^t - p + 1} = \frac{npe^t \cdot (pe^t - p + 1) - npe^t \cdot pe^t}{(pe^t - p + 1)^2} \\
&= \frac{npe^t \cdot [pe^t - p + 1 - pe^t]}{(pe^t - p + 1)^2} = \frac{npe^t \cdot (1 - p)}{(pe^t - p + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Pre $t = 0$ máme:

$$D(X) = \frac{npe^t \cdot (1 - p)}{(pe^t - p + 1)^2} \Big|_{t=0} = \frac{np(1 - p)}{(p - p + 1)^2} = np(1 - p).$$

Pokračovať budeme s vyjadrením šikmosti pre binomické rozdelenie. Aj tentokrát volíme postup ako pri alternatívnom rozdelení, kde si najprv odvodíme čitateľa, tak menovateľa a dosadíme do vzťahu (1.14).

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dt^3} \kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \frac{npe^t \cdot (1 - p)}{(pe^t - p + 1)^2} \\
&= \frac{npe^t(1 - p)(pe^t - p + 1)^2 - 2npe^t(1 - p)(pe^t - p + 1)pe^t}{(pe^t - p + 1)^4} \\
&= \frac{npe^t(1 - p)(pe^t - p + 1)[pe^t - p + 1 - 2pe^t]}{(pe^t - p + 1)^4} \\
&= \frac{npe^t(1 - p)[1 - p - pe^t]}{(pe^t - p + 1)^3}.
\end{aligned}$$

Dosadíme $t = 0$ a dostaneme:

$$\mu_3(X) = \frac{np(1 - p)[1 - p - p]}{(p - p + 1)^3} = np(1 - p)(1 - 2p).$$

$$\begin{aligned}
[\sigma(X)]^3 &= \sqrt{np(1 - p)} \cdot \sqrt{np(1 - p)} \cdot \sqrt{np(1 - p)} \\
&= np(1 - p)\sqrt{np(1 - p)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(X) &= \frac{np(1 - p)(1 - 2p)}{np(1 - p)\sqrt{np(1 - p)}} \\
&= \frac{1 - 2p}{\sqrt{np(1 - p)}}.
\end{aligned}$$

Týmto sme odvodili všetky požadované hodnoty vybraných charakteristík. □

Ak si uvedomíme, že binomické rozdelenie predstavuje počet úspechov v n nezávislých pokusoch, čo je vlastne súčet počtu úspechov v jednotlivých pokusoch v tvare

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i,$$

kde X_i sú nezávislé náhodné premenné s alternatívnym rozdelením s parametrom p , t.j. binomické rozdelenie s parametrami 1, p , tak môžeme využiť vzťah (1.27) uvedený v nasledujúcej Vete 1.23.

Takto získame odvodenie momentovej funkcie binomického rozdelenia oveľa jednoduchšie ako sme uviedli vyššie a tiež sa zjednoduší odvodenie charakteristík ako je vidieť v nasledujúcom texte.

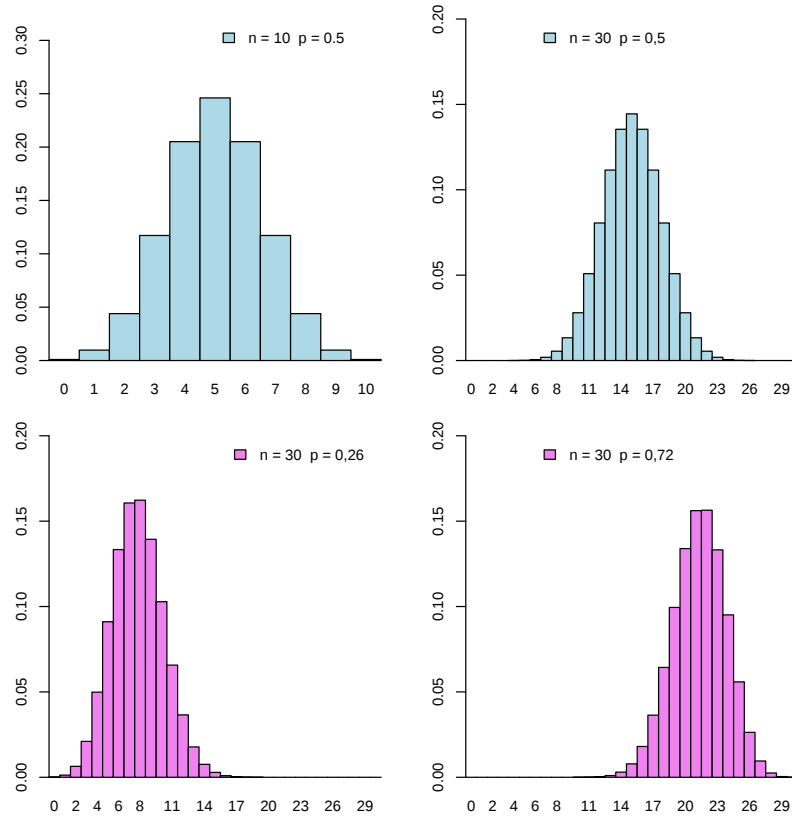
$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E[e^{t \cdot Y}] = E[e^{t \cdot (X_1 + \dots + X_n)}] = E[e^{t \cdot X_1} \cdot e^{t \cdot X_2} \cdot \dots \cdot e^{t \cdot X_n}] \\ &= \underbrace{E[e^{t \cdot X_1}]}_{1-p \cdot (1-e^t)} \cdot \underbrace{E[e^{t \cdot X_2}]}_{1-p \cdot (1-e^t)} \cdot \dots \cdot \underbrace{E[e^{t \cdot X_n}]}_{1-p \cdot (1-e^t)} = [1 - p \cdot (1 - e^t)]^n. \end{aligned} \quad (2.17)$$

A teda:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= [M_X(t)]^n & (2.18) \\ \ln M_Y(t) &= n \cdot \ln M_X(t) \\ \kappa_Y(t) &= n \cdot \kappa_X(t) \\ \kappa'_Y(t) &= n \cdot \kappa'_X(t) \\ &\vdots \\ \kappa_Y^i(t) &= n \cdot \kappa_X^i(t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Využitím posledných vzťahov a dosadením charakteristík alternatívneho rozdelenia (2.6), (2.8), (2.11) dostávame charakteristiky binomického rozdelenia. Na ukážku odvodíme strednú hodnotu. Ostatné charakteristiky sa odvodlia podobným spôsobom.

$$\begin{aligned} E(Y) &= n \cdot \kappa'_X(0) = n \cdot \frac{1}{1 - p + p \cdot e^t} \cdot p e^t \Big|_{t=0} \\ &= \frac{n}{1 - p + p \cdot 1} \cdot p \cdot 1 = np. \end{aligned} \quad (2.20)$$



Obrázok 2.2: Binomické rozdelenie s rozdielnymi parametrami

Príslušný zdrojový kód

```
par(mfrow=c(2,2), cex=0.79)
par(mar=c(2, 4, 2, 0.5))
barplot(dbinom(0:10, 10, 0.5), space=0, names=0:10, col="light blue",
        xaxs="i", ylim=c(0,0.32), xlim=c(0, 11))
legend(x=5.3, y=0.32, legend=c("n = 10  p = 0.5"), fill=c("light blue"),
       bty="n")
barplot(dbinom(0:30, 30, 0.5), space=0, names=0:30, col="light blue",
        xaxs="i", ylim=c(0,0.2), xlim=c(0, 31))
legend(x=6, y=0.2, legend=c("n = 30  p = 0,5"), fill=c("light blue"), bty="n")
barplot(dbinom(0:30, 30, 0.26), space=0, names=0:30, col="violet", xaxs="i",
        ylim=c(0,0.2), xlim=c(0, 31))
legend(x=16, y=0.2, legend=c("n = 30  p = 0,26"), fill=c("violet"), bty="n")
barplot(dbinom(0:30, 30, 0.71), space=0, names=0:30, col="violet", xaxs="i",
        ylim=c(0,0.2), xlim=c(0, 31))
legend(x=6, y=0.2, legend=c("n = 30  p = 0,72"), fill=c("violet"), bty="n")
```

2.3 Poissonovo rozdelenie

Názov tohto rozdelenia je odvodený od mena francúzskeho matematika, S. D. Poissona, ktorý ho zaviedol v roku 1838.

Rozdelenie sa používa na modelovanie počtu výskytov sledovanej náhodnej udalosti (ktorá nastáva s veľmi malou pravdepodobnosťou, t.j. zriedkavá udalosť) za určitý časový interval, pričom priemernú hodnotu výskytov poznáme. Časový interval nie je jedinou možnosťou voľby. Namiesto času môžeme uvažovať tiež veľkosť plochy, objemu a pod.

Poissonovo rozdelenie sa vyznačuje tým, že má len jeden parameter, ktorý označujeme gréckym písmenom λ . Jeho dôležitou vlastnosťou je to, že pri vhodných podmienkach ($n \rightarrow \infty$ a $p \rightarrow 0$) dobre aproximuje binomické rozdelenie. Platí totiž, že ak $X_n \sim Bi(n, p_n)$ a $n \cdot p_n = \lambda$, tak rozdelenie X_n konverguje k $Po(\lambda)$.

Definícia 2.7 *Hovoríme, že náhodná premenná X má **Poissonovo rozdelenie**, ak existuje $\lambda > 0$ také, že jej pravdepodobnostná funkcia má tvar*

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots \quad (2.21)$$

Označujeme to $X \sim Po(\lambda)$.

Veta 2.8 *Momentová vytvárajúca funkcia M_X náhodnej premennej s Poissonovým rozdelením je funkcia vyjadrená v tvare*

$$M_X(t) = e^{\lambda \cdot (e^t - 1)}. \quad (2.22)$$

Dôkaz. Odvodíme príslušnú momentovú vytvárajúcu funkciu Poissonovho rozdelenia. Vychádzame zo vzťahu (1.20). V druhom kroku aplikujeme vzťah (1.10) a následne si upravíme sumu na nekonečný rad.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{t \cdot X}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{t \cdot k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot e^t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \left[(\lambda \cdot e^t)^0 \cdot \frac{1}{0!} + (\lambda \cdot e^t)^1 \cdot \frac{1}{1!} + (\lambda \cdot e^t)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Použijeme substitúciu

$$x = \lambda \cdot e^t, \quad (2.23)$$

ktorou dostaneme zjednodušený výraz

$$\begin{aligned} M_X(t) &= e^{-\lambda} \cdot \left[1 + x + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^3}{3!} + \dots \right] \\ &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^x. \end{aligned}$$

Použitím spätnej substitúcie z (2.23), získame požadované vyjadrenie momentovej funkcie.

$$M_X(t) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot e^t} = e^{-\lambda + \lambda \cdot e^t} = e^{\lambda \cdot (e^t - 1)},$$

čiže momentová vytvárajúca funkcia Poissonovho rozdelenia má tvar

$$M_X(t) = e^{\lambda \cdot (e^t - 1)}. \quad (2.24)$$

Veta 2.9 *Nech X je náhodná premenná s Poissonovým rozdelením, $X \sim Po(\lambda)$. Potom jej stredná hodnota má hodnotu*

$$E(X) = \lambda, \quad (2.25)$$

rozptyl

$$D(X) = \lambda \quad (2.26)$$

a šikmosť

$$\gamma(X) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.27)$$

Dôkaz. Z Vety 2.8 pre momentovú vytvárajúcu funkciu Poissonovho rozdelenia odvodíme strednú hodnotu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_X(t) &= \frac{d}{dt} e^{\lambda \cdot (e^t - 1)} \\ &= e^{\lambda \cdot (e^t - 1)} \cdot \lambda \cdot e^t. \end{aligned}$$

Dosadením $t = 0$ máme:

$$E(X) = e^{\lambda(1-1)} \cdot \lambda \cdot 1 = \lambda.$$

V nasledujúcich krokoch si túto hodnotu odvodíme pomocou kumulantomvej vytvá-

rajúcej funkcie.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \ln \left(e^{\lambda(e^t-1)} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \lambda(e^t - 1) \\ &= \lambda \cdot e^t.\end{aligned}$$

Pre $t = 0$ dostaneme:

$$E(X) = \lambda \cdot e^t|_{t=0} = \lambda.$$

Na výpočet rozptylu použijeme druhú deriváciu kumulantovej vytvárajúcej funkcie (1.17).

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \lambda \cdot e^t \\ &= \lambda \cdot e^t.\end{aligned}$$

Dosadením $t = 0$ dostaneme:

$$D(X) = \lambda.$$

Koeficient šikmosti Poissonovho rozdelenia vyjadruje vzťah (1.18), do čitateľa ktorého dosadíme hodnotu tretieho centrálneho momentu. Ten si vyjadríme použitím vzťahu (1.17).

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dt^3}\kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \lambda e^t \\ &= \lambda \cdot e^t.\end{aligned}$$

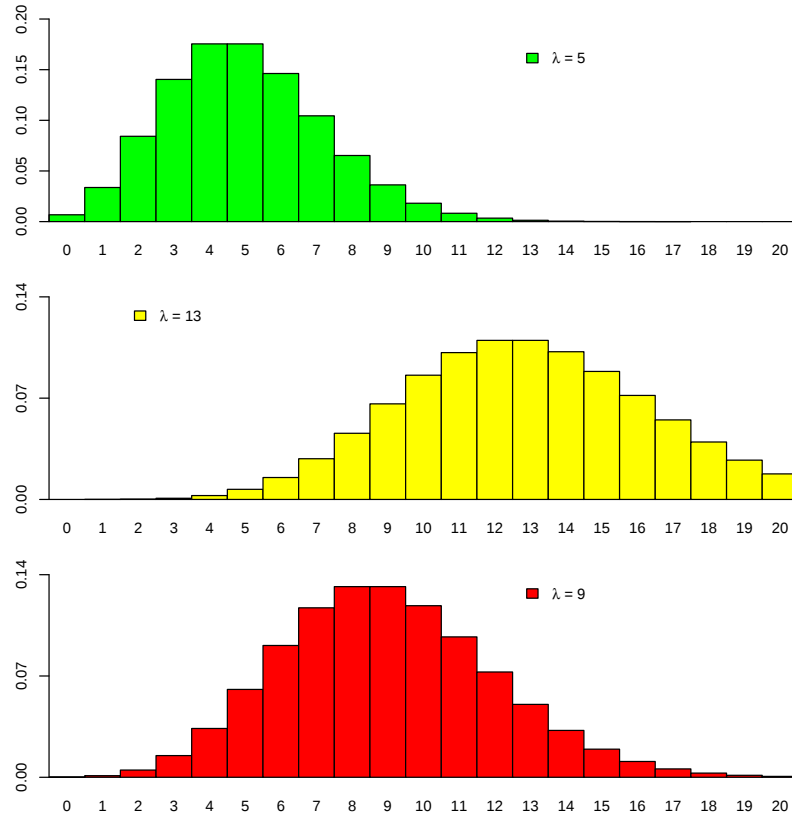
Pre $t = 0$ máme:

$$E[(X - E(X))^3] = \lambda \cdot e^t|_{t=0} = \lambda.$$

Dosadením výrazu (2.28) do čitateľa vzťahu pre výpočet koeficientu šikmosti dostávame:

$$\begin{aligned}\gamma(X) &= \frac{\lambda}{\left(\sqrt{\lambda}\right)^3} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda \cdot \sqrt{\lambda}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.\end{aligned}$$

□



Obrázok 2.3: Poissonove rozdelenie s rozdielnymi parametrami

Príslušný zdrojový kód

```
par(mfrow=c(3,1), cex=0.79)
par(mar=c(2, 4, 2, 0.5))
barplot(dpois(0:20, 5), names=0:20, ylim=c(0, 0.2), space=0, col="green",
        xaxs="i")
legend(x=13, y=0.18, substitute(paste(lambda, " = 5")), fill=c("green"),
        bty="n")
barplot(dpois(0:20, 13), names=0:20, ylim=c(0, 0.14), space=0, col="
        yellow", xaxs="i", yaxt="n")
axis(2, c(0, 0.07, 0.14))
legend(x=2, y=0.14, substitute(paste(lambda, " = 13")), fill=c("yellow")
        , bty="n")
barplot(dpois(0:20, 9), names=0:20, ylim=c(0, 0.14), space=0, col="red",
        xaxs="i", yaxt="n")
axis(2, c(0, 0.07, 0.14))
legend(x=13, y=0.14, substitute(paste(lambda, " = 9")), fill=c("red"),
        bty="n")
```

2.4 Geometrické rozdelenie

Geometrické rozdelenie modeluje počet neúspechov, ktoré predchádzajú prvému úspechu. V prípade zaznamenania prvého úspechu prestaneme vykonávať náhodné pokusy. Pripomíname, že r predstavuje počet úspechov, ktoré nastanú v postupnosti n náhodne vykonaných pokusov.

Definícia 2.10 Náhodná premenná X má geometrické rozdelenie s parametrom $p \in (0, 1)$, $X \sim \text{Geo}(p)$, ak jej pravdepodobnostnú funkciu môžeme vyjadriť v tvare

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} \cdot p^r \cdot (1-p)^k \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots \quad (2.28)$$

Veta 2.11 Momentová vytvárajúca funkcia M_X náhodnej premennej s geometrickým rozdelením je funkcia vyjadrená v tvare

$$M_X(t) = \frac{p}{1 - e^t \cdot (1-p)}. \quad (2.29)$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{t \cdot X}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{t \cdot k} \cdot p \cdot (1-p)^k \\ &= p + e^t \cdot p \cdot (1-p) + e^{2t} \cdot p \cdot (1-p)^2 + \dots \\ &= p \cdot (1 + e^t \cdot (1-p) + e^{2t} \cdot (1-p)^2 + \dots). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Členy v zátvorke tvoria geometrický rad, ktorého súčet vypočítame pomocou vzorca $\frac{a_0}{1-q}$, kde pre náš prípad hodnoty prvého člena a kvocienta sú

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ q &= e^t \cdot (1-p), \end{aligned}$$

z čoho pre $t = 0$ dostaneme:

$$M_X(t) = p \cdot \frac{1}{1 - e^t \cdot (1-p)} = \frac{p}{1 - e^t \cdot (1-p)}. \quad \square$$

Veta 2.12 Nech X je náhodná premenná s geometrickým rozdelením, $X \sim G(p)$. Potom jej charakteristiky nadobúdajú takéto hodnoty:
stredná hodnota

$$E(X) = \frac{1-p}{p}, \quad (2.31)$$

rozptyl

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2}. \quad (2.32)$$

a šikmost'

$$\gamma(X) = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}. \quad (2.33)$$

Dôkaz.

V dôkaze overíme hodnoty charakteristík (stredná hodnota, rozptyl, šikmost').

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}M_X(t) &= \frac{d}{dt} \frac{p}{1 - e^t \cdot (1-p)} \\ &= \frac{(-p) \cdot [1 - e^t + pe^t]'}{[1 - e^t(1-p)]^2} \\ &= \frac{(-p) [-e^t + pe^t]}{[1 - e^t(1-p)]^2} \\ &= \frac{p \cdot [e^t(1-p)]}{[1 - e^t(1-p)]^2}. \end{aligned}$$

Dosadením $t = 0$ máme:

$$\begin{aligned} E(X) &= \left. \frac{p \cdot [e^t(1-p)]}{[1 - e^t(1-p)]^2} \right|_{t=0} \\ &= \frac{p \cdot [1(1-p)]}{[1 - 1(1-p)]^2} \\ &= \frac{p(1-p)}{(1-1+p)^2} \\ &= \frac{1-p}{p}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \ln \left[\frac{p}{1 - e^t(1-p)} \right] \\ &= \frac{1}{\frac{p}{1-e^t(1-p)}} \cdot \frac{(-p)(-(1-p) \cdot e^t)}{(1 - e^t \cdot (1-p))^2} \\ &= \frac{1 - e^t(1-p)}{p} \cdot \frac{p(1-p)e^t}{(1 - e^t \cdot (1-p))^2} \\ &= \frac{(1-p) \cdot e^t}{1 - e^t(1-p)}. \end{aligned}$$

Pre $t = 0$ dostaneme:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1-p}{1 - (1-p)} \\ &= \frac{1-p}{p}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Vzťahmi (2.34), (2.35) sme overili vzorec pre strednú hodnotu geometrického rozdelenia, preto môžeme prejsť k odvodeniu hodnoty rozptylu.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} \kappa_X(t) &= (1-p) \cdot \frac{d}{dt} \frac{e^t}{1 - e^t(1-p)} \\
&= (1-p) \cdot \frac{e^t [1 - e^t(1-p)] - e^t [-e^t(1-p)]}{(1 - e^t(1-p))^2} \\
&= \frac{(1-p)e^t [1 - e^t(1-p) + e^t(1-p)]}{(1 - e^t(1-p))^2} \\
&= \frac{(1-p)e^t}{(1 - e^t(1-p))^2}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Pre $t = 0$ dostaneme:

$$D(X) = \frac{1-p}{(1 - (1-p))^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

V nasledujúcich krokoch budeme pokračovať odvodením hodnoty koeficientu šikmosti, vychádzať budeme zo vzťahu (1.18). Najskôr si vyjadríme hodnotu čitateľa.

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dt^3} \kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \frac{e^t(1-p)}{(1 - e^t(1-p))^2} \\
&= (1-p) \cdot \frac{e^t (1 - e^t(1-p))^2 - 2e^t (1 - e^t(1-p)) (-e^t(1-p))}{(1 - e^t(1-p))^4} \\
&= \frac{(1-p)e^t (1 - e^t(1-p)) \cdot [1 - e^t(1-p) + 2e^t(1-p)]}{(1 - e^t(1-p))^4} \\
&= \frac{(1-p)e^t (1 - e^t(1-p)) \cdot [1 + e^t(1-p)]}{(1 - e^t(1-p))^4} \\
&= \frac{(1-p)e^t (1 + e^t(1-p))}{(1 - e^t(1-p))^3}.
\end{aligned}$$

Dodaním $t = 0$ máme:

$$\begin{aligned}
\mu_3(X) &= \left. \frac{(1-p)e^t (1 + e^t(1-p))}{(1 - e^t(1-p))^3} \right|_{t=0} \\
&= \frac{(1-p) (1 + (1-p))}{(1 - (1-p))^3} \\
&= \frac{(1-p)(2-p)}{p^3}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Pokračujeme vyjadrovaním hodnoty menovateľa vzťahu (1.18).

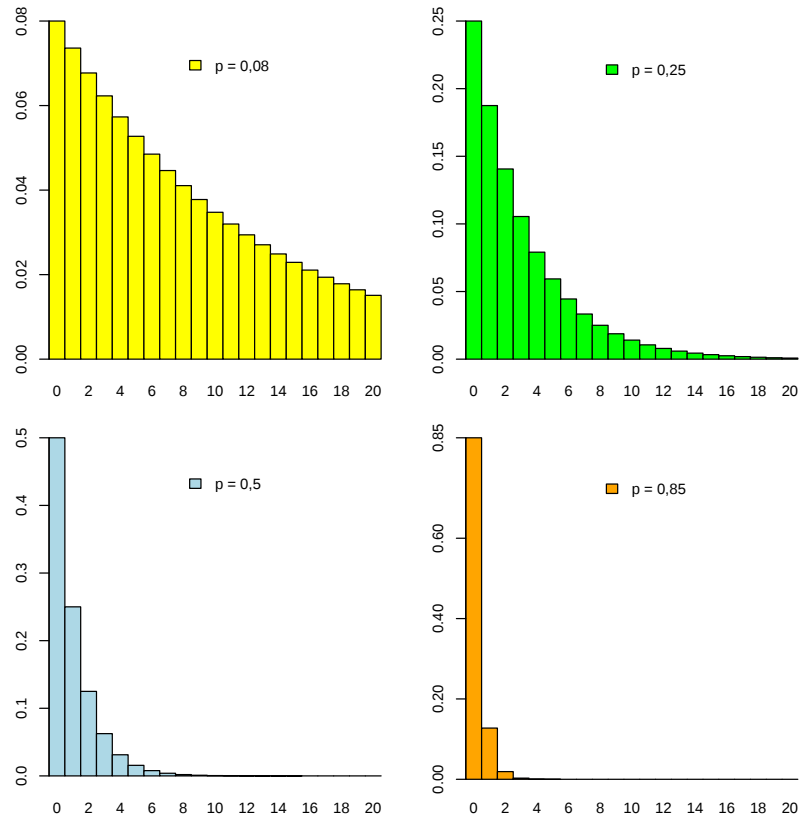
$$\begin{aligned}
 [\sigma(X)]^3 &= \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} \cdot \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} \cdot \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} \\
 &= \frac{1-p}{p^2} \cdot \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} \\
 &= \frac{1-p}{p^3} \cdot \sqrt{1-p}.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Výsledné hodnoty (2.37), (2.38) dosadíme do príslušného vzťahu (1.18) pre koeficient šikmosti:

$$\begin{aligned}
 \gamma(X) &= \frac{\frac{(1-p)(2-p)}{p^3}}{\frac{1-p}{p^3} \cdot \sqrt{1-p}} \\
 &= \frac{p^3(1-p)(2-p)}{p^3(1-p)\sqrt{1-p}} \\
 &= \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}.
 \end{aligned}$$

□

Nasledujúci Obrázok 2.4 znázorňuje hustotu geometrického rozdelenia.



Obrázok 2.4: Geometrické rozdelenie s rozdielnymi parametrami

Príslušný zdrojový kód

```

par(mfrow=c(2,2), cex=0.79)
par(mar=c(2, 4, 2, 0.5))
barplot(dgeom(0:20, 0.08), names=0:20, space=0, col="yellow", xaxs="i")
legend(x=8, y=0.074, legend=c("p = 0,08"), fill=c("yellow"), bty="n")
barplot(dgeom(0:20, 0.25), names=0:20, space=0, col="green", xaxs="i")
legend(x=8, y=0.228, legend=c("p = 0,25"), fill=c("green"), bty="n")
barplot(dgeom(0:20, 0.5), names=0:20, space=0, col="light blue", xaxs="i"
)
legend(x=8, y=0.46, legend=c("p = 0,5"), fill=c("light blue"), bty="n")
barplot(dgeom(0:20, 0.85), names=0:20, ylim=c(0, 0.85), space=0, col="
orange", xaxs="i", yaxt="n")
axis(2, c(0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.85))
legend(x=8, y=0.77, legend=c("p = 0,85"), fill=c("orange"), bty="n")

```

2.5 Negatívne binomické rozdelenie

Binomickým rozdelením modelujeme počet úspešných pokusov v postupnosti n pokusov. Napriek tomu negatívne binomické rozdelenie modeluje počet neúspešných pokusov v (potenciálne nekonečnej) postupnosti nezávislých náhodných pokusov, ktoré môžu nastať dovtedy, kým nastane presne r úspešných pokusov. Pravdepodobnosť každého úspechu je p a neúspechu $1 - p$. Dané rozdelenie nazývame negatívne preto, lebo sa pri ňom zameriavame na počet neúspechov. V uvedenom modeli predpokladáme, že parameter r je celé číslo. V praxi sa však ukazuje vhodným, aby parameter r bolo ľubovoľné kladné reálne číslo.

Definícia 2.13 Náhodná premenná X má **negatívne binomické rozdelenie** a parametrami $r > 0, p \in (0, 1)$ vtedy, ak jej pravdepodobnostná funkcia má tvar

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} \cdot p^r \cdot (1-p)^k, \quad (2.39)$$

pre $k = 0, 1, \dots$. Označujeme to $X \sim NBin(r, p)$.

Pripomeňme, že zovšeobecnené kombinačné čísla definujeme vzťahom

$$\binom{n}{k} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \dots \cdot (x-k+1)}{k!}$$

.

Veta 2.14 Momentová vytvárajúca funkcia M_X náhodnej premennej s negatívnym binomickým rozdelením je funkcia vyjadrená v tvare

$$M_X(t) = \left[\frac{p}{1 - e^t \cdot (1-p)} \right]^r. \quad (2.40)$$

Dôkaz. Budeme vychádzať zo vzťahov (1.20), (1.10).

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{t \cdot X}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{t \cdot k} \cdot \binom{k+r-1}{k} \cdot p^r \cdot (1-p)^k \\ &= \binom{r-1}{0} \cdot p^r + e^t \cdot \binom{r}{1} \cdot p^r \cdot (1-p) + e^{2t} \cdot \binom{r+1}{2} \cdot p^r \cdot (1-p)^2 + \dots \\ &= p^r \cdot \left[1 + \frac{r}{1!} \cdot e^t \cdot (1-p) + \frac{(r \cdot (r+1))}{2!} \cdot e^{2t} \cdot (1-p)^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Pre zjednodušenie vzorca zavedieme substitúciu

$$x = -e^t \cdot (1-p).$$

Po úprave výrazu (2.41) a využitím Taylorovho rozvoja pre funkciu $(1+x)^{-r}$ dostaneme

$$\begin{aligned} p^r \cdot \left[1 + \frac{(-r)}{1!} \cdot x + \frac{((-r) \cdot (1-r))}{2!} \cdot x^2 + \dots \right] &= p^r \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} \cdot x^k \\ &= p^r \cdot (1+x)^{-r}, \end{aligned}$$

za predpokladu, že $|x| < 1$, t.j. $t < \ln(1-p)$. Návratom k pôvodnému označeniu dostávame

$$\begin{aligned} M_X(t) = p^r \cdot [1 + (-e^t \cdot (1-p))]^{-r} &= p^r \cdot [1 - e^t \cdot (1-p)]^{-r} \\ &= \frac{p^r}{[1 - e^t \cdot (1-p)]^r} \\ &= \left[\frac{p}{1 - e^t \cdot (1-p)} \right]^r. \quad \square \end{aligned}$$

Veta 2.15 *Nech náhodná premenná X má negatívne binomické rozdelenie, $X \sim NBin(r, p)$. Potom jej charakteristiky nadobúdajú hodnoty:*

$$E(X) = \frac{r \cdot (1-p)}{p}, \quad (2.42)$$

$$D(X) = \frac{r \cdot (1-p)}{p^2}, \quad (2.43)$$

$$\gamma(X) = \frac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}. \quad (2.44)$$

Poznamenajme, že ak r je celé, tak náhodnú premennú $X \sim NBin(r, p)$ môžeme vyjadriť v tvare

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_r,$$

kde $X_1, \dots, X_r \sim Geo(p)$ sú nezávislé. Takže Vety v tomto prípade vyplývajú z Viet pre geometrické rozdelenie (viď sekcia 1.5).

Dôkaz. Keďže momentová funkcia X je r -tou mocninou momentovej funkcie geometrického rozdelenia $Geo(p)$, vzťahy vyplývajú priamo z Vety 1.24. My však ukážeme aj priamy výpočet. Začneme strednou hodnotou, vychádzame zo vzťahu (1.10).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}M_X(t) &= \frac{-p^r ([1 - e^t(1-p)]^r)'}{[1 - e^t(1-p)]^{2r}} \\
&= \frac{-p^r \cdot \left(r \cdot [1 - e^t(1-p)]^{r-1} \cdot [-(1-p)e^t] \right)}{[1 - e^t(1-p)]^{2r}} \\
&= \frac{(-p)^r (p-1)e^t \cdot \left(r \cdot [1 - e^t(1-p)]^{r-1} \right)}{[1 - e^t(1-p)]^{2r}}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Dosadením $t = 0$ máme:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{(-p)^r \cdot (p-1) \left(r \cdot [1 - (1-p)]^{r-1} \right)}{[1 - (1-p)]^{2r}} \\
&= \frac{p^r (1-p) \cdot r \cdot p^{r-1}}{p^{2r}} \\
&= \frac{r(1-p)}{p}.
\end{aligned}$$

Opäť vyjadríme strednú hodnotu, ale pomocou kumulantovej funkcie.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \left[r \cdot \ln \frac{p}{1 - e^t \cdot (1-p)} \right] \\
&= r \cdot \frac{1}{\frac{p}{1 - e^t(1-p)}} \cdot \frac{-p \cdot [-e^t(1-p)]}{[1 - e^t(1-p)]^2} \\
&= r \cdot \frac{1 - e^t(1-p)}{p} \cdot \frac{p [e^t(1-p)]}{[1 - e^t(1-p)]^2} \\
&= r \cdot \frac{e^t(1-p)}{1 - e^t(1-p)}.
\end{aligned}$$

Takže po dosadení $t = 0$ máme:

$$E(X) = r \cdot \frac{1-p}{p}.$$

Prejdeme k vyjadreniu rozptylu, pri ktorom vychádzame zo vzťahov (1.14) a (1.17).

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\kappa_X(t) &= r(1-p) \cdot \frac{d}{dt} \frac{e^t}{1 - e^t(1-p)} \\
&= r(1-p) \cdot \frac{e^t [1 - e^t(1-p)] - e^t [-e^t(1-p)]}{[1 - e^t(1-p)]^2} \\
&= r(1-p) \frac{e^t}{[1 - e^t(1-p)]^2}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Pre $t = 0$ dostaneme:

$$\begin{aligned} D(X) &= r(1-p) \frac{e^t}{[1 - e^t(1-p)]^2} \Big|_{t=0} = \frac{r(1-p)}{[1 - (1-p)]^2} \\ &= \frac{r(1-p)}{p^2}. \end{aligned}$$

Na záver si vyjadríme hodnotu koeficientu šikmosti pre negatívne binomické rozdelenie, pričom využijeme vzťahy (1.18) a (1.17). Postupujeme tak, že si najskôr vypočítame hodnoty čitateľa a menovateľa vzťahu (1.18), ktoré následne dosadíme, čím sa dopracujeme k výslednému vyjadreniu koeficientu šikmosti.

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} \kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \frac{r(1-p)e^t}{[1 - e^t(1-p)]^2} \\ &= r(1-p) \frac{e^t [1 - e^t(1-p)]^2 - 2e^t [1 - e^t(1-p)] \cdot [-e^t(1-p)]}{[1 - e^t(1-p)]^4} \\ &= r(1-p) \frac{e^t [1 - e^t(1-p)] \cdot 1 - e^t(1-p) + 2(e^t(1-p))}{[1 - e^t(1-p)]^4} \\ &= r(1-p) \frac{e^t (1 + e^t(1-p))}{[1 - e^t(1-p)]^3}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Dosadením $t = 0$ dostaneme:

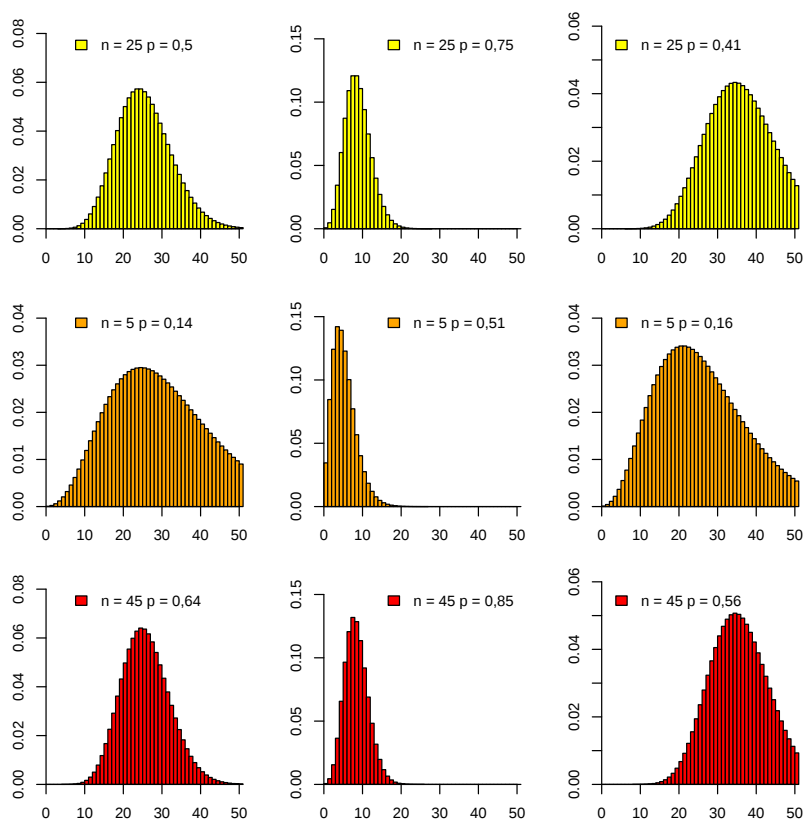
$$\begin{aligned} \mu_3(X) &= r(1-p) \frac{e^t (1 + e^t(1-p))}{[1 - e^t(1-p)]^3} \Big|_{t=0} = r(1-p) \frac{(1 + (1-p))}{[1 - (1-p)]^3} \\ &= r(1-p) \frac{2-p}{p^3}. \end{aligned}$$

Hodnotu čitateľa máme, teraz vypočítame hodnotu menovateľa.

$$\begin{aligned} [\sigma(X)]^3 &= \sqrt{D(X)^3} \\ &= \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}} \cdot \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}} \cdot \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}} \\ &= \frac{r(1-p)}{p^2} \cdot \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

A dosadíme do vzťahu (1.18), čím získame výslednú hodnotu koeficientu šikmosti.

$$\begin{aligned}
\gamma(X) &= \frac{\frac{r(1-p)(2-p)}{p^3}}{\frac{r(1-p)\sqrt{r(1-p)}}{p^3}} \\
&= \frac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}.
\end{aligned}
\tag{2.49}$$



Obrázok 2.5: Negatívne binomické rozdelenie s rozdielnymi parametrami

Príslušný zdrojový kód

```

par(mfrow=c(3,3), cex=0.79)
par(mar=c(2, 4, 2, 0.5))
barplot(dnbinom(0:50, 25, 0.5), ylim=c(0,0.083), xlim=c(0, 50), space=0,
        col="yellow", xaxs="i", xlab=NA)
axis(1, c(0, 10, 20, 30, 40, 50))
legend(x=4, y=0.083,legend=c("n = 25 p = 0,5"), fill=c("yellow"), bty="n")
barplot(dnbinom(0:50, 25, 0.75), ylim=c(0,0.16), xlim=c(0, 50), space=0,
        col="yellow", xaxs="i", xlab=NA)
axis(1, c(0, 10, 20, 30, 40, 50))
legend(x=13, y=0.16,legend=c("n = 25 p = 0,75"), fill=c("yellow"), bty="n")
barplot(dnbinom(0:50, 25, 0.41), ylim=c(0, 0.06), xlim=c(0, 50),space=0,
        col="yellow", xaxs="i", xlab=NA)
axis(1, c(0, 10, 20, 30, 40, 50))
legend(x=0.01, y=0.06,legend=c("n = 25 p = 0,41"), fill=c("yellow"), bty="n")
barplot(dnbinom(0:50, 5, 0.14), ylim=c(0, 0.043), xlim=c(0, 50), space=0,
        col="orange", xaxs="i", xlab=NA)
axis(1, c(0, 10, 20, 30, 40, 50))
legend(x=4, y=0.043,legend=c("n = 5 p = 0,14"), fill=c("orange"), bty="n")
barplot(dnbinom(0:50, 5, 0.51), ylim=c(0, 0.16), xlim=c(0, 50), space=0,
        col="orange", xaxs="i", xlab=NA)
axis(1, c(0, 10, 20, 30, 40, 50))
legend(x=13, y=0.16,legend=c("n = 5 p = 0,51"), fill=c("orange"), bty="n")
barplot(dnbinom(0:50, 5, 0.16), ylim=c(0, 0.043), xlim=c(0, 50), space=0,
        col="orange", xaxs="i", xlab=NA)
axis(1, c(0, 10, 20, 30, 40, 50))
legend(x=0.01, y=0.043,legend=c("n = 5 p = 0,16"), fill=c("orange"), bty="n")
barplot(dnbinom(0:50, 45, 0.64), ylim=c(0, 0.083), xlim=c(0, 50), space=0,
        col="red", xaxs="i", xlab=NA)
axis(1, c(0, 10, 20, 30, 40, 50))
legend(x=4, y=0.083,legend=c("n = 45 p = 0,64"), fill=c("red"), bty="n")
barplot(dnbinom(0:50, 45, 0.85), ylim=c(0, 0.16), xlim=c(0, 50), space=0,
        col="red", xaxs="i", xlab=NA)
axis(1, c(0, 10, 20, 30, 40, 50))
legend(x=13, y=0.16,legend=c("n = 45 p = 0,85"), fill=c("red"), bty="n")
barplot(dnbinom(0:50, 45, 0.56), ylim=c(0, 0.06), xlim=c(0, 50), space=0,
        col="red", xaxs="i", xlab=NA)
axis(1, c(0, 10, 20, 30, 40, 50))
legend(x=0.01, y=0.06,legend=c("n = 45 p = 0,56"), fill=c("red"), bty="n")

```

Kapitolu o diskretných rozdeleniach sme uzatvorili negatívnym binomickým rozdelením. Prejdeme na rozdelenia spojité.

Kapitola 3

Spojité rozdelenia

Postup, aký sme uvádzali v Kapitole 2 o diskretných rozdeleniach budeme využívať aj v tejto kapitole. Uvedieme nami vybrané typy rozdelení, ktoré zdefinujeme a prislúchajúce vlastnosti sformulujeme do viet. Rovnako ako aj v Kapitole 2 o diskretných rozdeleniach, uvedené tvrdenia dokážeme spôsobom, v ktorom sa budeme opierať o momentovú vytvárajúcu funkciu a kumulantovú vytvárajúcu funkciu.

3.1 Normálne rozdelenie

Jedno z najdôležitejších, najviac využívaných rozdelení je normálne rozdelenie. Aj keď ho priamo nemožno použiť na modelovanie výšky nárokov v poisťovníctve, uvádzame ho preto, lebo sa s ním stretávame napríklad pri aproximáciách rozdelenia celkovej výšky nárokov.

Na jeho popis používame dva parametre. Parameter μ , ktorý ovplyvňuje umiestnenie strednej hodnoty normálneho rozdelenia (posun po osi x). Druhým parametrom je parameter σ . Ten vyjadruje variabilitu tohto rozdelenia, t.j. vplýva na tvar rozdelenia (s jeho rastom je funkcia hustoty šikmejšia, ak klesá, graf je plochší).

Definícia 3.1 *Nech $-\infty < \mu < \infty$ a $\sigma > 0$. Potom náhodná premenná X má **normálne rozdelenie**, $X \sim N(\mu, \sigma)$, práve vtedy, keď jej funkciou hustoty je funkcia v tvare*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}, \quad (-\infty < x < \infty). \quad (3.1)$$

Veta 3.2 *Momentová funkcia normálneho rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$ je*

$$M_X(t) = e^{t \cdot \mu + \frac{\sigma^2 \cdot t^2}{2}} \quad \text{pre } t(-\infty, \infty). \quad (3.2)$$

Dôkaz. Vychádzame z definície (1.18). Pre $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ je:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{t \cdot X}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \cdot x} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \cdot x} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} dx. \end{aligned}$$

Zavedieme substitúciu:

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \mu}{\sigma} \\ dz &= \frac{1}{\sigma} dx. \end{aligned}$$

Jej použitím dostávame:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \cdot (\mu + \sigma \cdot z)} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \cdot \mu} \cdot e^{t \cdot \sigma \cdot z} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{t \cdot \mu} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(z^2 - 2 \cdot t \cdot \sigma \cdot z)}{2}} dz \\
&= e^{t \cdot \mu} \cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(z - \sigma t)^2}{2}} dz \\
&= e^{t \cdot \mu} \cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot 1 \\
&= e^{t \cdot \mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Veta 3.3 Náhodná premenná X s normálnym rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$ má nasledovné charakteristiky:

$$E(X) = \mu, \quad (3.3)$$

$$D(X) = \sigma^2, \quad (3.4)$$

$$\gamma(X) = 0. \quad (3.5)$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_X(t) &= \frac{d}{dt} e^{\mu \cdot t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \\
&= e^{\mu \cdot t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot \left(\mu \cdot t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right)' \\
&= e^{\mu \cdot t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot \left(\mu + \frac{2\sigma^2 t}{2} \right) \\
&= e^{\mu \cdot t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot (\mu + \sigma^2 t).
\end{aligned}$$

Po dosadení $t = 0$ dostávame:

$$\begin{aligned}
E(X) &= e^{\mu \cdot 0 + \frac{\sigma^2 0^2}{2}} \cdot (\mu + \sigma^2 \cdot 0) \\
&= e^0 \cdot (\mu + 0) = \mu.
\end{aligned}$$

Odvodenie pomocou kumulantovej funkcie je takmer úplne triviálne, keďže

$$\kappa_X(t) = \mu \cdot t + \frac{\sigma^2 \cdot t^2}{2}.$$

$$\frac{d}{dt}\kappa_X(t) = \frac{d}{dt}\left(\mu \cdot t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) = \mu + \sigma^2 t.$$

Teda

$$E(X) = \mu + \sigma^2 \cdot 0 = \mu.$$

Keďže

$$\frac{d^2}{dt^2}\kappa_X(t) = \frac{d}{dt}(\mu + \sigma^2 t) = \sigma^2,$$

pre varianciu X máme:

$$D(X) = \sigma^2.$$

No a nakoniec

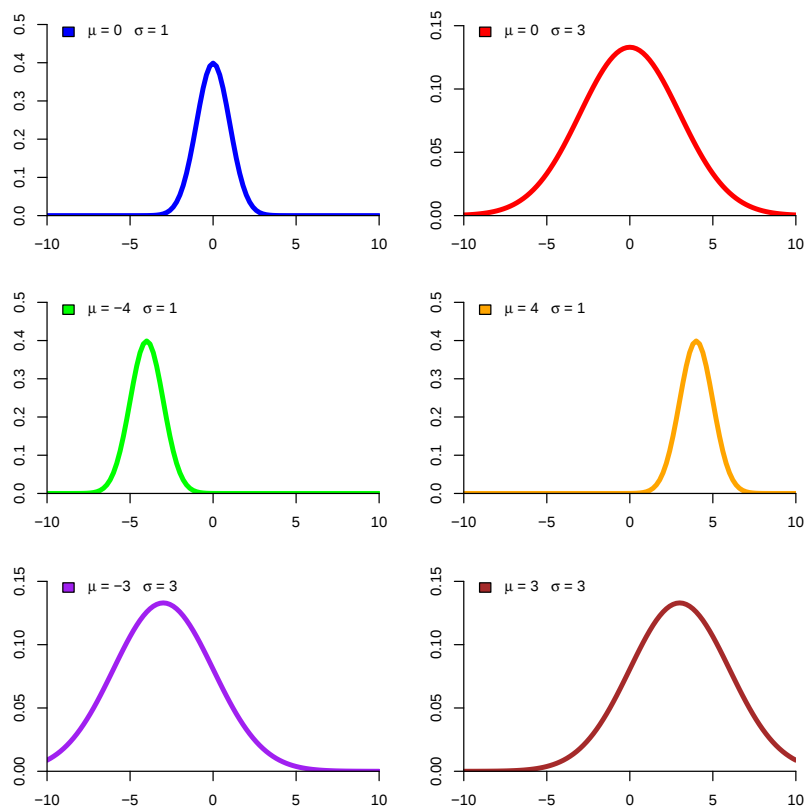
$$\frac{d^3}{dt^3}\kappa_X(t) = \frac{d}{dt}\sigma^2 = 0,$$

z čoho je vidieť, že

$$\gamma(X) = 0.$$

□

Nasledujúci Obrázok 3.1 zobrazuje hustotu normálneho rozdelenia pre rôzne parametre. Za ním uvádzame príslušný zdrojový kód napísaný v štatistickom programe R.



Obrázok 3.1: Hustota normálneho rozdelenia

Príslušný zdrojový kód

```
par(mfrow=c(3,2), cex=0.79)
par(mar=c(2, 4, 2, 0.5))
curve(dnorm(x, 0, 1), -10, 10, col="blue", ylim=c(0, 0.53), lwd=4, axes=
  FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=-9.9, y=0.53, substitute(paste(mu, " = 0", sigma, " = 1")),
  fill=c("blue"), bty="n")
curve(dnorm(x, 0, 3), -10, 10, col="red", ylim=c(0, 0.16), lwd=4, axes=
  FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=-9.9, y=0.16, substitute(paste(mu, " = 0", sigma, " = 3")),
  fill=c("red"), bty="n")
curve(dnorm(x, -4, 1), -10, 10, col="green", ylim=c(0, 0.53), lwd=4, axes=
  FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=-9.9, y=0.53, substitute(paste(mu, " = -4", sigma, " = 1")),
  fill=c("green"), bty="n")
curve(dnorm(x, 4, 1), -10, 10, col="orange", ylim=c(0, 0.53), lwd=4, axes=
  FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
```

```

axis(1)
axis(2)
legend(x=-9.9, y=0.53, substitute(paste(mu, " = 4", sigma, " = 1")),
      fill=c("orange"), bty="n")
curve(dnorm(x, -3, 3), -10, 10, col="purple", ylim=c(0,0.16), lwd=4, axes=
      FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=-9.9, y=0.16, substitute(paste(mu, " = -3", sigma, " = 3")),
      fill=c("purple"), bty="n")
curve(dnorm(x, 3, 3), -10, 10, col="brown", ylim=c(0,0.16), lwd=4, axes=
      FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=-9.9, y=0.16, substitute(paste(mu, " = 3", sigma, " = 3")),
      fill=c("brown"), bty="n")

```

3.2 Rovnomerné rozdelenie

Rovnomerné rozdelenie popisujeme dvoma parametrami a, b , ktoré vymedzia uvažovaný interval. Parameter a udáva počiatočný bod intervalu a parameter b jeho koncový bod.

Pomocou rovnomerného rozdelenia popisujeme spojité náhodné premenné, ktoré nadobúdajú hodnoty z intervalu (a, b) , pričom pravdepodobnosť, že konkrétna realizácia bude z nejakého podintervalu závisí iba od dĺžky podintervalu.

Poznamenajme, že môžeme definovať aj diskrétné rovnomerné rozdelenie.

Definícia 3.4 *Nech $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Potom náhodná premenná X má **rovnomerné rozdelenie**, ak jej hustota pravdepodobnosti má tvar*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b. \end{cases} \quad (3.6)$$

V takomto prípade píšeme $X \sim U(a, b)$.

Veta 3.5 *Momentová funkcia rovnomerného rozdelenia $U(a, b)$ je*

$$M_X(t) = \frac{e^{t \cdot b} - e^{t \cdot a}}{t \cdot (b - a)}. \quad (3.7)$$

Dôkaz. Budeme vychádzať zo vzťahov Definícia 1.18 a (1.11).

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E[e^{t \cdot X}] \\ &= \int_a^b e^{t \cdot x} \cdot \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b e^{t \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{e^{t \cdot x}}{t} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{e^{b \cdot t}}{t} - \frac{e^{a \cdot t}}{t} \right] \\ &= \frac{1}{t \cdot (b-a)} \cdot [e^{b \cdot t} - e^{a \cdot t}] \\ &= \frac{e^{t \cdot b} - e^{t \cdot a}}{t \cdot (b-a)}. \end{aligned} \quad \square$$

Nasledujúca veta popisuje vlastnosti náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením.

Veta 3.6 *Nech X je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením, $X \sim U(a, b)$. Potom jej stredná hodnota, rozptyl a šikmosť nadobúdajú takéto hodnoty:*

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad (3.8)$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad (3.9)$$

$$\gamma(X) = 0. \quad (3.10)$$

Dôkaz.

Pre overenie hodnôt charakteristík uvedených vo Vete 3.6 budeme potrebovať vyjadrenie momentovej vytvárajúcej funkcie rovnomerného rozdelenia, ktoré je uvedené vo Vete 3.5. Taktiež budeme vychádzať zo vzťahu (1.11). Robíme tak preto, lebo v tomto prípade je výpočet pomocou tohto vzorca jednoduchší ako cez momentovú funkciu.

Vezmime ľubovoľné reálne $r \geq 0$. Potom

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_a^b x^r \cdot \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^r dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^{r+1}}{r+1} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1} \right) \\ &= \frac{b^r + b^{r-1} \cdot a + b^{r-2} \cdot a^2 + \dots + a^r}{r+1}. \end{aligned}$$

Teda

$$E[X] = \frac{b+a}{2}, \quad (3.11)$$

$$E[X^2] = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}, \quad (3.12)$$

$$E[X^3] = \frac{b^3 + b^2a + ba^2 + a^3}{4}. \quad (3.13)$$

Strednú hodnotu náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením sme odvodili v predchádzajúcich krokoch, viď (3.11). Pre výpočet hodnoty rozptylu použijeme vzťah (1.14), do ktorého dosadíme vypočítané hodnoty (3.11) a (3.12).

$$\begin{aligned}
D(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} \\
&= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2}{12} \\
&= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Vzťah (3.14) vyjadruje hodnotu rozptylu rovnomerného rozdelenia.

V poslednom kroku vyjadríme hodnotu koeficientu šikmosti pre rovnomerné rozdelenie, ktorú získame použitím nasledujúceho vzťahu

$$\gamma = \frac{E[(X - E(X))^3]}{D(X)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.15}$$

Následne upravíme hodnotu čitateľa.

$$\begin{aligned}
E[(X - E(X))^3] &= E(X^3) - 3 \cdot E(X) \cdot E(X^2) + 3 \cdot E^2(X) \cdot E(X) - E(X^3) \\
&= E(X^3) - 3 \cdot E(X) \cdot E(X^2) + 2 \cdot E^3(X).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Vyjadrením (3.13) sme získali poslednú neznámu hodnotu vzťahu (3.16). Z tohto dôvodu môžeme ďalej pokračovať výpočtom hodnoty čitateľa vzťahu (3.15).

$$\begin{aligned}
E[(X - E(X))^3] &= \frac{b^4 - a^4}{4 \cdot (b-a)} - 3 \cdot \frac{b+a}{2} \cdot \frac{b^2 + ab + a^2}{3} + 2 \cdot \left(\frac{b+a}{2}\right)^3 \\
&= \frac{b^4 - a^4}{4 \cdot (b-a)} - \frac{b^3 + ab^2 + a^2b + ab^2 + a^2b + a^3}{2} + 2 \cdot \frac{(b+a)^3}{8} \\
&= \frac{b^4 - a^4}{4 \cdot (b-a)} - \frac{b^3 + 2ab^2 + 2a^2b + a^3}{2} + \frac{b^3 + 3b^2a + 3ba^2 + a^3}{4} \\
&= \frac{(b-a) \cdot (b^3 + ba^2 + ab^2 + a^3) + (b-a) \cdot [-b^3 - ab^2 - a^2b - a^3]}{4 \cdot (b-a)} \\
&= \frac{(b-a) \cdot b^3 + ba^2 + ab^2 + a^3 - b^3 - ab^2 - a^2b - a^3}{4 \cdot (b-a)} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

takže

$$\gamma(X) = 0.$$

Ako vidíme zo vzťahu (3.17) hodnota koeficientu šikmosti rovnomerného rozdelenia je nulová. Týmto sme ukončili odvodenie nami vybraných charakteristík rovnomerného rozdelenia. $\square$

Poznámka 3.7 *Poznamenajme, že nulovosť koeficientu šikmosti vyplýva zo symetrie rovnomerného rozdelenia. Dokonca pre $X \sim U(a, b)$ máme*

$$\mu_{2k+1} = E \left[(X - EX)^{2k+1} \right] = 0,$$

pre každé prirodzené k .

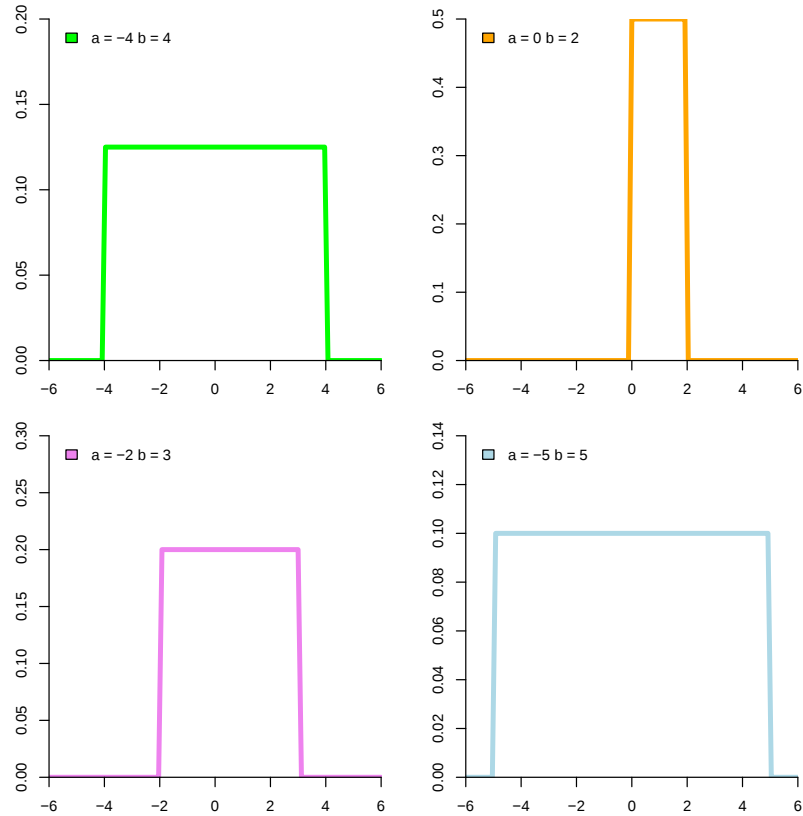
Dôkaz. Označme $\mu = \frac{a+b}{2}$, $\delta = \frac{b-a}{2}$. Potom

$$(b-a) \cdot \mu_{2k+1} = \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} (x-\mu)^{2k+1} dx = \int_{\mu}^{\mu+\delta} + \int_{\mu-\delta}^{\mu}.$$

Ak v druhom integrály využijeme substitúciu $y = 2\mu - x$, dostaneme

$$\dots = \int_{\mu}^{\mu+\delta} - \int_{\mu}^{\mu-\delta} = 0.$$

$\square$



Obrázok 3.2: Hustota rovnomerného rozdelenia

Príslušný zdrojový kód

```
par(mfrow=c(2,2), cex=0.79)
par(mar=c(2, 4, 2, 0.5))
curve(dunif(x, -4, 4), -6, 6, col="green", ylim=c(0, 0.2), lwd=4, axes=
      FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=-5.9, y=0.2, legend=c("a = -4 b = 4"), fill=c("green"), bty="n")
curve(dunif(x, 0, 2), -6, 6, col="orange", ylim=c(0, 0.5), lwd=4, axes=
      FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=-5.9, y=0.5, legend=c("a = 0 b = 2"), fill=c("orange"), bty="n")
curve(dunif(x, -2, 3), -6, 6, col="violet", ylim=c(0, 0.3), lwd=4, axes=
      FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=-5.9, y=0.3, legend=c("a = -2 b = 3"), fill=c("violet"), bty="n"
      )
curve(dunif(x, -5, 5), -6, 6, col="light blue", ylim=c(0, 0.14), lwd=4,
      axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
```

```
legend(x=-5.9, y=0.14, legend=c("a = -5 b = 5"), fill=c("light blue"),  
      bty="n")
```

3.3 Exponenciálne rozdelenie

Exponenciálne rozdelenie je dobrým modelom situácií, v ktorých sledované udalosti nastávajú s konštantnou pravdepodobnosťou za jednotku času ako je napríklad doba čakania na udalosť alebo doba životnosti zariadenia, na ktorom je príčinou výskytu porúch náhoda, nie opotrebovanie, a navyše doba, ktorú zariadenie odpracovalo, sa zanedbáva. Využitie tohto rozdelenia je aj v teórii hromadnej obsluhy.

V poistnej matematike ním modelujeme časy medzi nárokmi, kde proces počtu nárokov je Poissonovým procesom a tiež ním modelujeme výšky nárokov.

Jediným parametrom exponenciálneho rozdelenia je parameter λ , ktorý ovplyvňuje tvar rozdelenia. Hustota konverguje k nule veľmi rýchlo pre $x \rightarrow \pm\infty$, a teda nie je vhodné pre modelovanie výšky nárokov, u ktorých pravdepodobnosť vysokých hodnôt je rádovo vyššia a ktorých výskyt môže mať likvidačný dopad, ak ich nebudeme brať do úvahy.

Definícia 3.8 *Hovoríme, že náhodná premenná X má **exponenciálne rozdelenie** s parametrom $\lambda > 0$, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, práve vtedy, ak jej hustota pravdepodobnosti má tvar*

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, \quad x > 0. \quad (3.18)$$

Veta 3.9 *Momentová funkcia $M_X(t)$ exponenciálneho rozdelenia $\text{Exp}(\lambda)$ je funkcia*

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - t} & t < \lambda \\ \infty & t \geq \lambda. \end{cases} \quad (3.19)$$

Dôkaz. Pri dôkaze budeme vychádzať z Definície 1.18 a vzťahu (1.11).

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{t \cdot X}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx \\ &= \lambda \cdot \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \cdot \int_0^{\infty} e^{x \cdot (t - \lambda)} dx \\ &= \lambda \cdot \left[\frac{e^{x \cdot (t - \lambda)}}{t - \lambda} \right]_0^{\infty} \\ &= \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - t} & t < \lambda \\ \infty & t \geq \lambda. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Veta 3.10 *Nech náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Potom jej charakteristiky ako stredná hodnota, rozptyl a koeficient šikmosti nadobúdajú*

nasledovné hodnoty:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad (3.20)$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (3.21)$$

$$\gamma(X) = 2. \quad (3.22)$$

Dôkaz. Začneme odvodením strednej hodnoty. Najskôr pomocou momentovej vytvárajúcej funkcie, potom pomocou kumulantomvej funkcie. Pritom vychádzame zo vzťahu (1.11).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_X(t) &= \frac{d}{dt} \frac{\lambda}{\lambda - t} \\ &= \frac{(-\lambda) \cdot (-1)}{(\lambda - t)^2} \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}. \end{aligned}$$

Pre $t = 0$ dostávame

$$E(X) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Pomocou kumulantomvej funkcie je výpočet nasledovný:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{\lambda}{\lambda - t}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)' \\ &= \frac{\lambda - t}{\lambda} \cdot \frac{0 - \lambda \cdot (-1)}{(\lambda - t)^2} \\ &= \frac{(\lambda - t) \cdot \lambda}{\lambda \cdot (\lambda - t)^2} \\ &= \frac{1}{\lambda - t}. \end{aligned}$$

Ak $t = 0$, tak

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Prejdeme na odvodenie rozptylu. Aplikujeme vzťah (1.14).

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\lambda - t} \\ &= \frac{0 - 1 \cdot (-1)}{(\lambda - t)^2} \\ &= \frac{1}{(\lambda - t)^2}.\end{aligned}$$

Dosadením $t = 0$ máme

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Hodnotu koeficientu šikmosti odvodíme tak, že si najprv vyjadríme čitateľa a následne dosadíme do vzťahu (1.18).

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dt^3}\kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{(\lambda - t)^2} \\ &= \frac{-1 \cdot [(\lambda - t)^2]'}{(\lambda - t)^4} \\ &= \frac{-2 \cdot (\lambda - t) \cdot (-1)}{(\lambda - t)^4} \\ &= \frac{2}{(\lambda - t)^3}.\end{aligned}$$

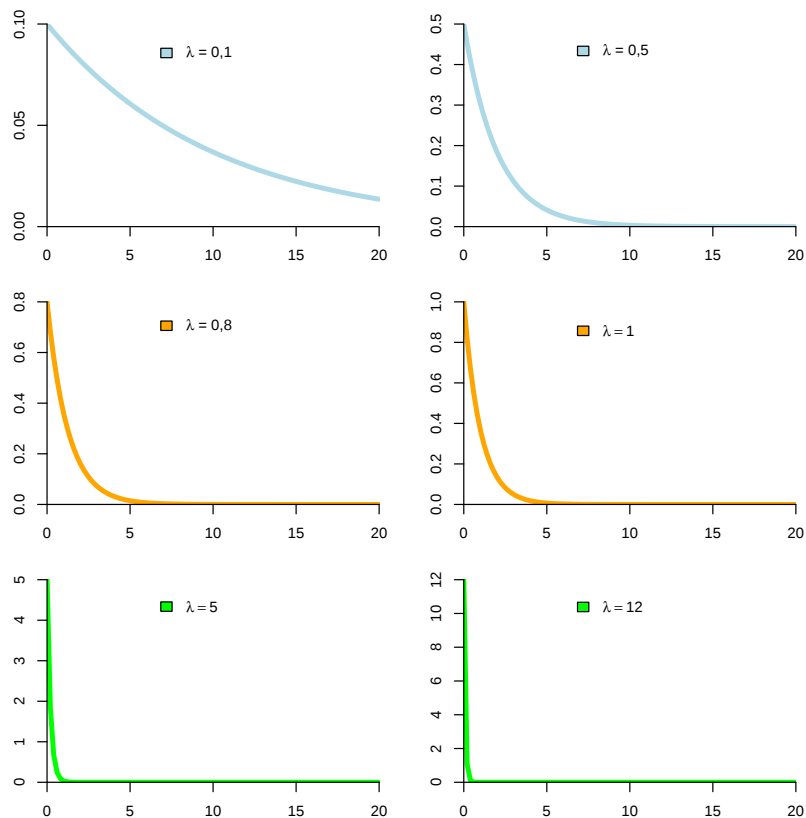
Pre $t = 0$

$$E[(E - E(X))^3] = \frac{2}{\lambda^3},$$

a teda

$$\gamma(X) = \frac{\frac{2}{\lambda^3}}{\frac{1}{\lambda^3}} = \frac{2 \cdot \lambda^3}{\lambda^3} = 2.$$

□



Obrázok 3.3: Hustota exponenciálneho rozdelenia.

Pre vykreslenie Obrázka 3.3 sme použili nasledujúci kód:

Príslušný zdrojový kód

```
par(mfrow=c(3,2), cex=0.79)
par(mar=c(2, 4, 2, 0.5))
curve(dexp(x, 0.1), 0, 20, ylim=c(0, 0.1), col="light blue", lwd=4, axes=
  FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2, c(0, 0.05, 0.1))
legend(x=6, y=0.095, substitute(paste(lambda, " = 0,1")), fill=c("light
  blue"), bty="n")
curve(dexp(x, 0.5), 0, 20, ylim=c(0, 0.5), col="light blue", lwd=4, axes=
  FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=6, y=0.48, substitute(paste(lambda, " = 0,5")), fill=c("light
  blue"), bty="n")
curve(dexp(x, 0.8), 0, 20, ylim=c(0, 0.8), col="orange", lwd=4, axes=
  FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=6, y=0.78, substitute(paste(lambda, " = 0,8")), fill=c("orange"
), bty="n")
```

```

curve(dexp(x, 1), 0, 20, ylim=c(0, 1), col="orange", lwd=4, axes=FALSE,
      xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=6, y=0.95, substitute(lambda==1), fill=c("orange"), bty="n")
curve(dexp(x, 5), 0, 20, ylim=c(0, 5), col="green", lwd=4, axes=FALSE,
      xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=6, y=4.8, substitute(lambda==5), fill=c("green"), bty="n")
curve(dexp(x, 12), 0, 20, ylim=c(0, 12), col="green", lwd=4, axes=FALSE,
      xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=6, y=11.5, substitute(lambda==12), fill=c("green"), bty="n")

```

3.4 Gamma rozdelenie

O niečo viac flexibilnejším rozdelením ako exponenciálne rozdelenie je gamma rozdelenie. Na jeho popis používame dva parametre, a to parameter α (ovplyvňuje tvar rozdelenia) a parameter β (parameter intenzity). Ak uvažujeme prípad, v ktorom parameter α nadobudne hodnotu 1, čiže $G(1, \beta)$, dostaneme exponenciálne rozdelenie s parametrom β , t.j. $Exp(\beta)$.

Zaujímavou vlastnosťou tohto rozdelenia je to, že zmiešané Poissonovo rozdelenie, kde parameter λ je náhodná premenná s gamma rozdelením, je vlastne negatívne binomické rozdelenie.

Aj napriek väčšiemu počtu parametrov gamma rozdelením nemožno modelovať "vysoké" nároky (t.j. také nároky, pri ktorých je nezanedbateľná pravdepodobnosť extrémne vysokých hodnôt). Preto sa gamma rozdelenie používa skôr pri aproximácii výšky poistných plnení pri poistení motorových vozidiel ako pri poistení proti vzniku požiaru v domácnosti.

Definícia 3.11 Náhodná premenná X má **gamma rozdelenie** s parametrami α, β , $X \sim G(\alpha, \beta)$, práve vtedy, keď jej hustotu pravdepodobnosti môžeme vyjadriť v tvare

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta \cdot x}, \quad x > 0. \quad (3.23)$$

Pripomeňme, že Γ je gamma-funkcia definovaná vzťahom

$$\Gamma(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx.$$

Veta 3.12 Momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej s gamma rozdelením $G(\alpha, \beta)$ má tvar

$$M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha. \quad (3.24)$$

Dôkaz. V tomto dôkaze odvodíme momentovú vytvárajúcu funkciu využitím definície

1.18 a vzťahu (1.11).

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E[e^{t \cdot X}] \\
&= \int_0^\infty e^{t \cdot x} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta \cdot x} dx \\
&= \int_0^\infty e^{\alpha \cdot (t-\beta) x} x^{\alpha-1} dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty e^{\alpha \cdot (t-\beta) x} \cdot x^{\alpha-1} dx
\end{aligned}$$

Zavedením substitúcie

$$u = x \cdot (\beta - t) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{u}{\beta - t} \quad \Longrightarrow \quad x^{\alpha-1} = \frac{u^{\alpha-1}}{(\beta - t)^{\alpha-1}}$$

$$du = (\beta - t)dx \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{du}{\beta - t} \quad t < \beta,$$

dostávame

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty e^{-u} \cdot \frac{u^{\alpha-1}}{(\beta - t)^{\alpha-1}} \frac{du}{\beta - t} \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{1}{\beta - t}\right)^\alpha du \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{1}{\beta - t}\right)^\alpha \cdot \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{\alpha-1} du \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{1}{\beta - t}\right)^\alpha \cdot \Gamma(\alpha) \\
&= \frac{\beta^\alpha}{(\beta - t)^\alpha} \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha.
\end{aligned}$$

□

Veta 3.13 Náhodná premenná X s gamma rozdelením $G(\alpha, \beta)$ má takéto charakteristiky:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (3.25)$$

$$D(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}, \quad (3.26)$$

$$\gamma(X) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}. \quad (3.27)$$

Dôkaz. (Pomocou momentovej funkcie exponenciálneho rozdelenia)

V tomto dôkaze postupujeme tak, že najskôr budeme vychádzať z Vety 1.24 pri odvodzovaní týchto hodnôt, potom budeme pokračovať odvodením strednej hodnoty vychádzajúc zo vzťahu (1.11), následne prejdeme na rozptyl, pričom použijeme vzťah (1.14) a na záver vyjadríme koeficient šikmosti na základe vzťahu (1.18).

Máme náhodnú premennú X s gamma rozdelením $G(\alpha, \beta)$. Potom podľa Viet 3.12 a 3.9 je

$$M_X(t) = [M_Y(t)]^\alpha, \quad \text{kde } Y \sim \text{Exp}(\beta).$$

Teda podľa Vety 1.24 je

$$E(X) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta},$$

$$D(X) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta^2},$$

$$\gamma(X) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_X(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha \\ &= \alpha \cdot \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{-\beta \cdot (-1)}{(\beta - t)^2} \\ &= \alpha \cdot \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{\beta}{(\beta - t)^2}. \end{aligned}$$

Po dosadení $t = 0$ dostávame

$$E(X) = \alpha \cdot \left(\frac{\beta}{\beta} \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{\beta}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Pomocou derivácia kumulantomovej funkcie je

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \ln \left[\left(\frac{\beta}{\beta-t} \right)^\alpha \right] \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\beta}{\beta-t} \right)^\alpha} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{\beta-t} \right)^{\alpha-1} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta}{(\beta-t)^2} \\
&= \left(\frac{\beta-t}{\beta} \right)^\alpha \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{\beta-t} \right)^{\alpha-1} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta}{(\beta-t)^2} \\
&= \frac{(\beta-t)^\alpha}{\beta^\alpha} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta^{\alpha-1}}{(\beta-t)^{\alpha-1}} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta}{(\beta-t)^2} \\
&= \frac{\alpha}{\beta-t}.
\end{aligned}$$

Teda

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Druhá derivácia kumulantovej funkcie je

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \frac{\alpha}{\beta-t} \\
&= \frac{-\alpha \cdot (-1)}{(\beta-t)^2}.
\end{aligned}$$

Pre $t = 0$ máme

$$D(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dt^3}\kappa_X(t) &= \frac{d}{dt} \frac{\alpha}{(\beta-t)^2} \\
&= \frac{-2\alpha(\beta-t) \cdot (-1)}{(\beta-t)^4} \\
&= \frac{2\alpha(\beta-t)}{(\beta-t)^4} \\
&= \frac{2\alpha}{(\beta-t)^3}.
\end{aligned}$$

Ak $t = 0$

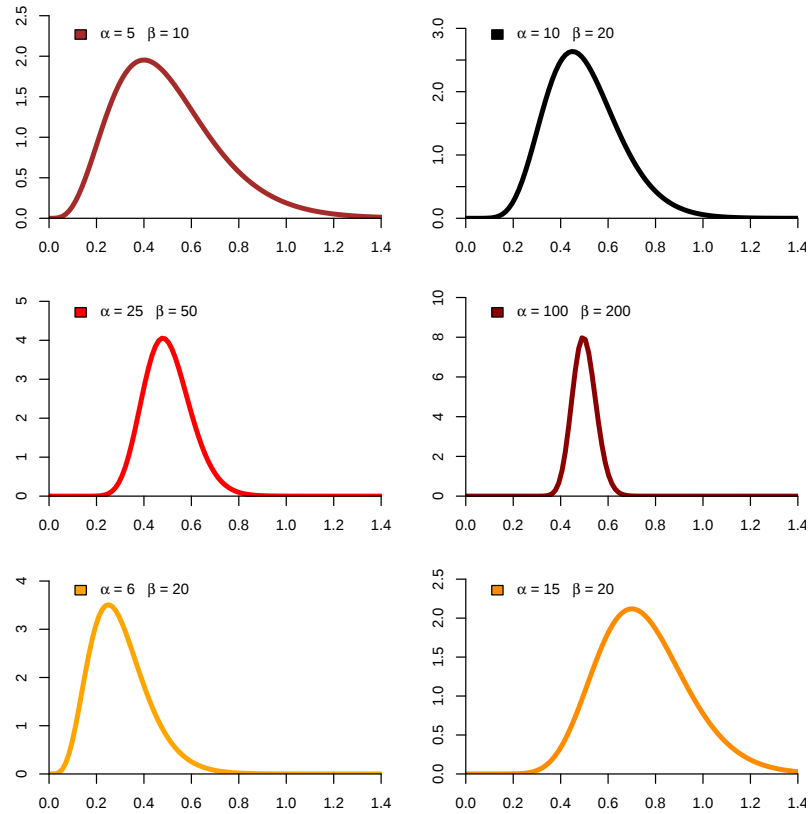
$$E[(E - E(X))^3] = \frac{2\alpha}{\beta^3}.$$

Takže môžeme vyjadriť šikmosť:

$$\gamma(X) = \frac{\frac{2\alpha}{\beta^3}}{\frac{\alpha}{\beta^3} \cdot \sqrt{\alpha}} = \frac{2\alpha \cdot \beta^3}{\beta^3 \cdot \alpha \cdot \sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}.$$

□

Nasledujúci Obrázok 3.4 ukazuje vplyv zmeny hodnôt parametrov gamma rozdelenia na tvar jeho hustoty. Za ním uvádzame príkazy napísané v programe R, pomocou ktorých sme tieto grafy vykreslili.



Obrázok 3.4: Hustota Gamma rozdelenia pre rôzne hodnoty parametrov α, β .

Príslušný zdrojový kód

```

par(mfrow=c(3,2), cex=0.79)
par(mar=c(2, 4, 2, 0.5))
curve(dgamma(x, 5, 10), col="brown", ylim=c(0, 2.5), xlim=c(0, 1.4), lwd
      =4, axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=0.05, y=2.5, substitute(paste(alpha, " = 5", beta, " = 10")),
      , fill=c("brown"), bty="n")
curve(dgamma(x, 10, 20), col="black", ylim=c(0, 3.2), xlim=c(0, 1.4), lwd
      =4, axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=0.05, y=3.2, substitute(paste(alpha, " = 10", beta, " = 20")),
      , fill=c("black"), bty="n")
curve(dgamma(x, 25, 50), col="red", ylim=c(0, 5.2), xlim=c(0, 1.4), lwd
      =4, axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=0.05, y=5.2, substitute(paste(alpha, " = 25", beta, " = 50")),
      , fill=c("red"), bty="n")
curve(dgamma(x, 100, 200), col="dark red", ylim=c(0, 10.2), xlim=c(0,
      1.4), lwd=4, axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=0.05, y=10.2, substitute(paste(alpha, " = 100", beta, " =
      200))), fill=c("dark red"), bty="n")
curve(dgamma(x, 6, 20), col="orange", ylim=c(0, 4.2), xlim=c(0, 1.4), lwd
      =4, axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=0.05, y=4.2, substitute(paste(alpha, " = 6", beta, " = 20")),
      , fill=c("orange"), bty="n")
curve(dgamma(x, 15, 20), col="dark orange", ylim=c(0, 2.6), xlim=c(0,
      1.4), lwd=4, axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=0.05, y=2.6, substitute(paste(alpha, " = 15", beta, " = 20")),
      , fill=c("dark orange"), bty="n")

```

3.5 Paretove rozdelenie

Talianský ekonóm, Vilfréd Pareto, popísal jedno zo spojitých rozdelení, a to Paretovo rozdelenie. Na rozdiel od exponenciálneho rozdelenia, jeho konvergencia k nule je pre veľké hodnoty pomalšia, čo je jedna z jeho výhod.

Dobre popisuje situácie, pri ktorých malé hodnoty majú veľkú pravdepodobnosť výskytu a čím väčšie hodnoty uvažujeme, tým je menšia pravdepodobnosť, že nastanú. Často sa používa na odhad katastrofických udalostí, teda na menej pravdepodobné javy, ktorých dopad však môže mať extrémne dôsledky.

Existujú dve verzie parametrizácií tohto rozdelenia, americká a európska. V tejto práci sme zvolili americký typ z dôvodu lepšej názornosti a grafickému znázorneniu hustoty pravdepodobnosti. V tomto prípade je totiž oborom hodnôt interval $(0, \infty)$. V americkej verzii Paretovho rozdelenia vystupujú dva parametre, α , λ , pričom λ popisuje umiestnenie, resp. posun grafu po osi x a α popisuje tvar grafu hustoty rozdelenia.

Definícia 3.14 *Náhodná premenná má **Paretove rozdelenie** s parametrami $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ vtedy, keď jej hustota pravdepodobnosti sa dá vyjadriť v tvare*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot \lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

V tomto prípade píšeme $X \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$.

Veta 3.15 *Momentová funkcia Paretovho rozdelenia $\text{Par}(\alpha, \lambda)$ je*

$$M_X(t) = \infty \quad \text{pre } \forall t > 0. \quad (3.29)$$

Veta 3.16 *Nech X je náhodná premenná s Paretovým rozdelením, $X \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$. Potom jej stredná hodnota je*

$$E(X) = \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \quad \text{ak } \alpha > 1, \quad (3.30)$$

rozptyl

$$D(X) = \frac{\alpha \cdot \lambda^2}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}, \quad \text{ak } \alpha > 2 \quad (3.31)$$

a koeficient šikmosti je

$$\gamma(X) = \frac{2(\alpha + 1)\sqrt{\alpha - 2}}{(\alpha - 3)\sqrt{\alpha}}, \quad \text{ak } \alpha > 3. \quad (3.32)$$

Dôkaz.

Vzhľadom na Vetu 1.20 overíme Vetu (3.16) využitím vzťahov (1.20), (1.11).

Vezmime ľubovoľné celé $1 \leq k < \alpha$. Potom využitím substitúcie $y = x + \lambda$ a binomického rozvoja máme:

$$\begin{aligned}
E[X^k] &= \alpha \cdot \lambda^\alpha \cdot \int_0^\infty \frac{x^k}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} dx = \alpha \cdot \lambda^\alpha \cdot \int_\lambda^\infty \frac{(y - \lambda)^k}{y^{\alpha+1}} dy \\
&= \alpha \cdot \lambda^\alpha \cdot \int_\lambda^\infty \left[\lambda^0 \binom{k}{0} y^{k-\alpha-1} - \lambda \cdot \binom{k}{1} y^{k-\alpha-2} + \lambda^2 \binom{k}{2} y^{k-\alpha-3} - \dots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^k \cdot \lambda^k \cdot \binom{k}{k} y^{-\alpha-1} dy \right. \\
&\hspace{25em} (3.34)
\end{aligned}$$

Keďže pre $r < -1$ je

$$\int_\lambda^\infty y^r dy = \left[\frac{y^{r+1}}{r+1} \right]_\lambda^\infty = \frac{-1}{r+1} \cdot \lambda^{r+1},$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
E[X^k] &= \alpha \cdot \lambda^\alpha \cdot \left[-\lambda^0 \binom{k}{0} \cdot \frac{\lambda^{k-\alpha}}{(k-\alpha)} + \lambda \cdot \binom{k}{1} \cdot \frac{\lambda^{k-\alpha-1}}{k-\alpha-1} - \dots \right] \\
&= \alpha \cdot \lambda^k \cdot \left[\frac{1}{\alpha-k} - \binom{k}{1} \cdot \frac{1}{\alpha-k+1} + \binom{k}{2} \cdot \frac{1}{\alpha-k+2} - \dots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^k \cdot \binom{k}{k} \frac{1}{\alpha} \right. \\
&\hspace{25em} (3.36)
\end{aligned}$$

Pre $k = 1, 2, 3$ teda máme:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \alpha \cdot \lambda \cdot \left[\frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha} \right] \\
&= \frac{\lambda}{\alpha-1}, \quad \text{ak } \alpha > 1
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \alpha \cdot \lambda^2 \cdot \left[\frac{1}{\alpha-2} - \frac{2}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha} \right] \\
&= \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}, \quad \text{ak } \alpha > 2
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
E[X^3] &= \alpha \cdot \lambda^3 \cdot \left[\frac{1}{\alpha-3} - \frac{3}{\alpha-2} + \frac{3}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha} \right] \\
&= \frac{6\lambda^3}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}, \quad \text{ak } \alpha > 3.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Môžeme pristúpiť k overeniu charakteristík Paretovho rozdelenia uvedených vo Vete 3.16. Začneme so strednou hodnotou. Použijeme vzťah (3.37), čím sme overili vzťah (3.30).

Ďalšiu charakteristiku, rozptyl, overíme na základe vzťahu (1.14), do ktorého dosadíme vyššie uvedené vzťahy (3.37) a (3.38). A teda,

$$D(X) = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \left(\frac{\lambda}{\alpha-1} \right)^2 = \frac{2\lambda^2(\alpha-1) - \lambda^2(\alpha-2)}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = \frac{\alpha \cdot \lambda^2}{(\alpha-2) \cdot (\alpha-1)^2}.$$

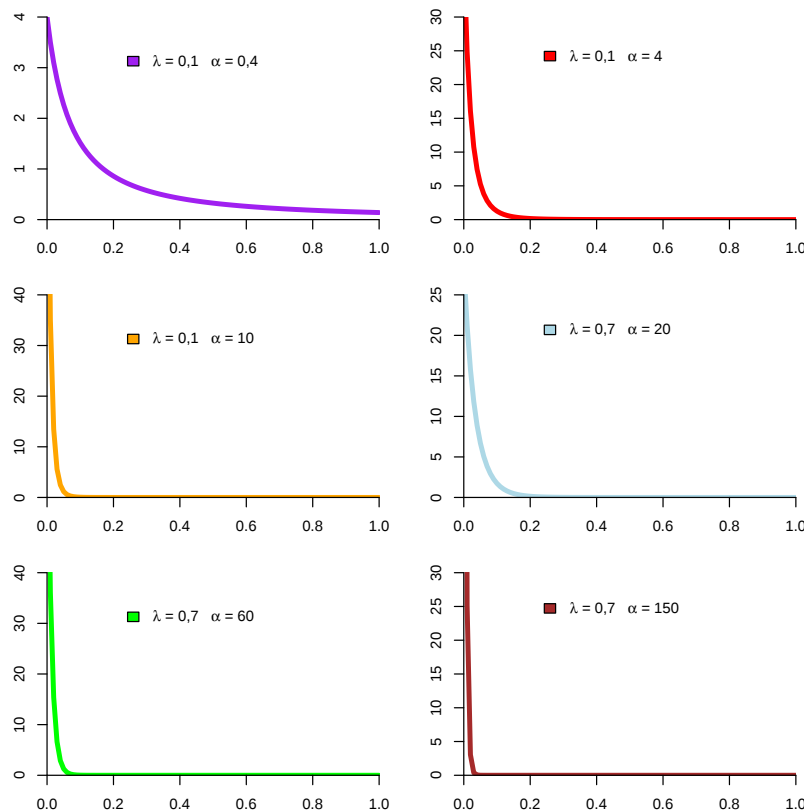
Na základe vzťahu (1.18) overíme poslednú charakteristiku, a to koeficient šikmosti. Pritom využijeme vzťahy (3.37), (3.38) a (3.39). Najskôr si vyjadríme hodnotu čitateľa.

$$\begin{aligned}
E[(X - EX)^3] &= E(X^3) - 3 \cdot E(X) \cdot E(X^2) + 2 \cdot E^3(X) \\
&= \frac{6\lambda^3}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)} - 3 \cdot \frac{\lambda}{\alpha-1} \cdot \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} + 2 \cdot \left[\frac{\lambda}{(\alpha-1)} \right]^3 \\
&= \frac{2\lambda^3 \cdot [6\alpha - 6 + \alpha^2 - 5\alpha + 6]}{(\alpha-1)^3 \cdot (\alpha-2) \cdot (\alpha-3)} \\
&= \frac{2\lambda^3 \cdot \alpha \cdot (\alpha+1)}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (\alpha-3)}.
\end{aligned}$$

Dosadením dostávame:

$$\gamma(X) = \frac{\frac{2\lambda^3 \cdot \alpha \cdot (\alpha+1)}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (\alpha-3)}}{\frac{\alpha \cdot \lambda^3 \cdot \sqrt{\alpha}}{3 \cdot (\alpha-2) \cdot (\alpha-1) \cdot \sqrt{\alpha-2}}} = \frac{2(\alpha+1) \cdot \sqrt{\alpha-2}}{(\alpha-3) \cdot \sqrt{\alpha}}. \quad \square$$

Pre vykreslenie nasledujúceho Obrázka 3.5 sme k prvej premennej funkcii **dpareto** pripočítali hodnotu premennej vyjadrujúcej polohu grafu. Robili sme tak preto, lebo v programe *R* je funkcia **dpareto** vytvorená na základe európskej parametrizácie, kdežto my sme vychádzali z americkej parametrizácie. Pritom sme pracovali s knižnicou *VGAM*, kde je táto funkcia naprogramovaná.



Obrázok 3.5: Hustota Paretovho rozdelenia

Príslušný zdrojový kód

```
library(VGAM)
par(mfrow=c(3,2), cex=0.79)
par(mar=c(2, 4, 2, 0.5))
curve(dpareto(x+0.1, 0.1, 0.4), col="purple", xlim=c(0.00000001, 1), ylim=
      c(0.00000001, 4), lwd=4, axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=0.2, y=3.5, substitute(paste(lambda, " = 0,1", alpha, " =
      0,4")), fill=c("purple"), bty="n")
curve(dpareto(x+0.1, 0.1, 4), col="red", xlim=c(0.00000001, 1), ylim=c
      (0.00000001, 30), lwd=4, axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=0.2, y=27, substitute(paste(lambda, " = 0,1", alpha, " = 4")
      ), fill=c("red"), bty="n")
curve(dpareto(x+0.1, 0.1, 10), col="orange", xlim=c(0.00000001, 1), ylim=
      c(0.00000001, 40), lwd=4, axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=0.2, y=35, substitute(paste(lambda, " = 0,1", alpha, " = 10"
      )), fill=c("orange"), bty="n")
curve(dpareto(x+0.7, 0.7, 20), col="light blue", xlim=c(0.00000001, 1),
```

```

ylim=c(0.00000001, 25), lwd=4, axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA
)
axis(1)
axis(2)
legend(x=0.2, y=23, substitute(paste(lambda, " = 0,7", alpha, " = 20"
)), fill=c("light blue"), bty="n")
curve(dpareto(x+0.7, 0.7, 60), col="green", xlim=c(0.00000001, 1), ylim=c
(0.00000001, 40), lwd=4, axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=0.2, y=35, substitute(paste(lambda, " = 0,7", alpha, " = 60"
)), fill=c("green"), bty="n")
curve(dpareto(x+0.7, 0.7, 150), col="brown", xlim=c(0.00000001, 1), ylim=c
(0.00000001, 30), lwd=4, axes=FALSE, xaxs="i", yaxs="i", ylab=NA)
axis(1)
axis(2)
legend(x=0.2, y=27.5, substitute(paste(lambda, " = 0,7", alpha, " =
150")), fill=c("brown"), bty="n")

```

Záver

V tejto práci sme sa venovali vybraným diskretným a spojitým rozdeleniam, ktoré možno využiť na modelovanie počtu a výšky poistných plnení.

Uviedli sme odlišný, ale detailný spôsob vyjadrenia ich charakteristík, pričom sme využili momentovú a kumulantovú vytvárajúcu funkciu. Snažili sme sa pritom o prehľadnosť a dostatočnú názornosť, aby bolo zrejmé, ako treba postupovať pri jednotlivých výpočtoch. Rovnako sme chceli ukázať výhodnosť využitia momentovej funkcie na výpočet charakteristík rozdelenia, preto sme často niektoré charakteristiky odvodzovali aj dvakrát. Taktiež sme uviedli grafické znázornenie pravdepodobností/hustôt jednotlivých rozdelení pre rôzne voľby ich parametrov. Príslušné obrázky sme vytvorili v štatistickom programe *R*; príslušné zdrojové kódy sú v práci uvedené.

Cieľom práce bola názorná ukážka výpočtu veľkostí charakteristík vybraných rozdelení. Je to dôležitá časť pri výbere správneho rozdelenia na popis empirických údajov a rozhodovaní sa pri výbere správneho modelu, či už pri modelovaní počtu alebo výšky poistných plnení.

Zoznam bibliografických odkazov

- [1] PACÁKOVÁ, V. 2000. *Aplikovaná poistná štatistika*. Bratislava : Vydavateľstvo ELITA, 2000. 260 s. ISBN 80-8044-073-5.
- [2] ŠTĚPÁN, J.; ZVÁRA, Š. 2001. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Mat-fyzPress, 2001. 230 s. ISBN 80-85863-76-6.
- [3] KAAS, R.; GOOVAERTS, M.; DHAENE, J.; DENUIT, M. 2008. *Modern Actuarial Risk Theory Using R*. Springer, 2008. 381 s. ISBN 978-3-540-70992-3.
- [4] RIEČAN, B.; NEUBRUNN, T. 1992. *Teória miery*. Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied VEDA, 1992. 406 s. ISBN 80-224-0368-7.
- [5] KATUŠČÁK, D. 1998. *Ako písať vysokoškolské a kvalifikačné práce*. Bratislava : Stimul, 1998. 117 s. ISBN 80-85697-82-3.
- [6] *Wikipedia, the free encyclopedia* [online] [cit. 2010-11-20]. Dostupné na internete: <http://en.wikipedia.org>.
- [7] RYTGAARD, M. 1990. *Estimation in the Pareto distribution*. [online] [cit. 2010-12-2]. Dostupné na internete: <http://www.casact.org/library/astin/vol20no2/201.pdf>