

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию . . . . .	5
Предисловие к первому тому . . . . .	7
ВВЕДЕНИЕ . . . . .	9
§ 1. Операции логики и теории множеств . . . . .	9
I. Алгебра логики. II. Алгебра множеств. III. Функции высказываний. IV. Операция $\mathbf{E}$ . V. Бесконечные операции на множествах. VI. Семейство всех подмножеств данного множества. VII. Идеалы. Фильтры.	
§ 2. Прямое произведение множеств . . . . .	14
I. Определение. II. Свойства прямого произведения. III. Оси, координаты, проекции. IV. Функции высказываний многих переменных. V. Связь между операторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{V}$ . VI. Умножение на ось. VII. Отношения. Факторсемейство. VIII. Конгруэнтность по модулю идеала.	
§ 3. Отображения. Упорядочения. Кардинальные и порядковые числа . . . . .	20
I. Терминология и обозначения. II. Образы и прообразы. III. Операции над образами и прообразами. IV. Коммутативные диаграммы. V. Многозначные отображения. VI. Множества одинаковой мощности. Кардинальные числа. VII. Характеристические функции. VIII. Обобщенное прямое произведение. IX. Примеры счетных произведений. X. Упорядочение. XI. Вполне упорядоченные множества. Порядковые числа. XII. Множество $X^{\aleph_\alpha}$ . XIII. Обратные спектры и их пределы. XIV. $(\mathcal{A})$ -операция. XV. Решето Лузина. XVI. Применение к канторову дисконтинууму $\mathcal{C}$ .	
ГЛАВА I. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА . . . . .	44
§ 4. Определения. Операция замыкания . . . . .	44
I. Определения. II. Геометрическая интерпретация. III. Правила топологического исчисления. IV. Относительное замыкание. V. Логический анализ системы аксиом.	

§ 5. Замкнутые и открытые множества . . . . .	49
I. Определения. II. Операции. III. Свойства. IV. Относительно замкнутые и относительно открытые множества. V. Множества типа $F_\sigma$ и $G_\delta$ . VI. Борелевские множества. VII. Покрывение пространства. Измельчение. VIII. Хаусдорфовы пространства. IX. $\mathcal{J}_0$ -пространства. X. Регулярные пространства. XI. База и подбаза.	
§ 6. Граница и внутренность множества . . . . .	60
I. Определения. II. Некоторые формулы. III. Связь с замкнутыми и открытыми множествами. IV. Теорема аддитивности. V. Отделимые множества. VI. Двойственность между операциями замыкания и взятия внутреннейности множества.	
§ 7. Окрестность точки. Локализация свойств . . . . .	66
I. Определение. II. Необходимые и достаточные условия. III. Сходящиеся фильтры. IV. Локализация. V. Локально замкнутые множества.	
§ 8. Всюду плотные, граничные и нигде не плотные множества . . . . .	71
I. Определения. II. Необходимые и достаточные условия. III. Операции. IV. Разложение границы. V. Множества, открытые по модулю нигде не плотных множеств. VI. Относительные свойства. VII. Локализация. VIII. Замкнутые области. IX. Открытые области.	
§ 9. Точки накопления . . . . .	81
I. Определения. II. Необходимые и достаточные условия. III. Некоторые формулы. IV. Дискретные множества. V. Множества, плотные в себе. VI. Разреженные множества.	
§ 10. Множества первой категории . . . . .	86
I. Определение. II. Свойства. III. Теорема единственности. IV. Относительные свойства. V. Локализация. VI. Формулы разложения.	
§ 11. Множества, открытые относительно множеств первой категории. Свойства Бэра . . . . .	92
I. Определение. II. Общие замечания. III. Операции. IV. Необходимые и достаточные условия. IVa. Теорема существования. V. Относительные свойства. VI. Свойство Бэра в узком смысле. VII. $(A)$ -операция.	
§ 12. Знакопередающиеся ряды замкнутых множеств . . . . .	101
I. Формулы общей теории множеств. II. Определение. III. Теоремы отделимости. Разложение в знакопередающийся ряд. IV. Свойства остатка. V. Необходимые и достаточные условия. VI. Свойства разложимых множеств. VII. Вычеты. VIII. Вычеты трансфинитного порядка.	

- § 13. Непрерывность. Гомеоморфизм . . . . . 108
- I. Определение. II. Необходимые и достаточные условия. III. Множество  $D(f)$  точек разрыва. IV. Непрерывные отображения. V. Относительные свойства. Сужение. Ретракция. VI. Вещественнозначные функции. Характеристические функции. VII. Взаимно однозначные непрерывные отображения. Сравнение топологий. VIII. Гомеоморфизм. IX. Топологические свойства. X. Топологический ранг. XI. Однородные множества. XII. Приложения к топологическим группам. XIII. Открытые отображения. Замкнутые отображения. XIV. Отображения, открытые и замкнутые в данной точке. XV. Взаимно непрерывные отображения.
- § 14. Вполне регулярные пространства. Нормальные пространства . . . 126
- I. Вполне регулярные пространства. II. Нормальные пространства. III. Системы множеств, подобные в комбинаторном смысле, в нормальных пространствах. IV. Действительные функции, определенные на нормальных пространствах. V. Наследственно нормальные пространства. VI. Совершенно нормальные пространства.
- § 15. Прямое произведение  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  топологических пространств . . . 143
- I. Определение. II. Проекция и непрерывные отображения. III. Действия над прямыми произведениями. IV. Диагональ. V. Свойства отображения  $f$ , рассматриваемого как подмножество пространства  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ . VI. Горизонтальные и вертикальные сечения. Цилиндр на множестве  $A \subset \mathcal{X}$ . VII. Инварианты прямого произведения.
- § 16. Обобщенные прямые произведения . . . . . 154
- I. Определение. II. Проекция и непрерывные отображения. III. Действия над прямыми произведениями. IV. Диагональ. V. Инварианты прямого произведения. VI. Пределы обратных спектров.
- § 17. Пространство  $2^{\mathcal{X}}$ . Экспоненциальная топология . . . . . 168
- I. Определение. II. Основные свойства. III. Непрерывные многозначные отображения. IV. Случай, когда пространство  $\mathcal{X}$  регулярно. V. Случай, когда пространство  $\mathcal{X}$  нормально. VI. Связь пространства  $2^{\mathcal{X}}$  со структурами и брауэровскими алгебрами.
- § 18. Полунепрерывные функции . . . . . 181
- I. Определения. II. Примеры. Связь с действительными полунепрерывными функциями. Замечания. III. Основные свойства. IV. Объединение полунепрерывных отображений. V. Пересечение полунепрерывных отображений. VI. Разность полунепрерывных отображений.
- § 19. Пространство разбиения. Фактортопология . . . . . 192
- I. Определение. II. Проекция. Связь с взаимно непрерывными отображениями. III. Примеры и замечания. IV. Связь фактортопологии с экспоненциальной топологией.

ГЛАВА 2. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА . . . . .	197
А. Связь с топологическими пространствами, $\mathcal{L}^*$ -пространства . . . . .	197
§ 20. $\mathcal{L}^*$ -пространства (в которых определено понятие предела) . . . . .	197
I. Определение. II. Связь с топологическими пространствами. III. Понятие непрерывности. IV. Прямое произведение $\mathcal{L}^*$ -пространств. V. Счетно-компактные $\mathcal{L}^*$ -пространства. VI. Непрерывная сходимость. Множество $\mathcal{Y}^x$ как $\mathcal{L}^*$ -пространство. VII. Операции над пространствами $\mathcal{Y}^x$ с $\mathcal{L}^*$ -топологией. VIII. Непрерывная сходимость в узком смысле. IX. Сходимость Мура — Смита (основные определения).	
§ 21. Метрические пространства. Общие свойства . . . . .	213
I. Определения. II. Топология в метрических пространствах. III. Диаметр. Непрерывность. Колебание. IV. Число $\rho(A, B)$ . Обобщенный шар. Нормальность метрических пространств. V. Ограничивающее отображение. VI. Метризация прямого произведения. VII. Расстояние между двумя множествами. Пространство $(2^x)_m$ . VIII. Вполне ограниченные пространства. IX. Эквивалентность между счетно-компактными и компактными метрическими пространствами. X. Равномерная сходимость. Метризация пространства $\mathcal{Y}^x$ . XI. Продолжение относительно замкнутых и относительно открытых множеств. XII. Измельчение бесконечных покрытий. XIII. $G_\delta$ -множества в метрических пространствах. XIV. Пространства близости. Равномерные пространства (основные определения). XV. Псевдометрические пространства. XVI. Паракompактность метрических пространств. XVII. Проблемы метризации.	
§ 22. Пространства со счетной базой . . . . .	247
I. Общие свойства. II. Метризация и введение координат. III. Сепарабельность пространства $\mathcal{Y}^x$ . IV. Отождествление замкнутых множеств. V. Произведение пространств со счетной базой. Множества первой категории. VI. Произведения пространств со счетной базой. Свойство Бэра.	
Б. Проблемы мощности . . . . .	259
§ 23. Мощность пространства. Точки конденсации . . . . .	259
I. Мощность пространства. II. Плотное подмножество. III. Точки конденсации. IV. Основные свойства операции $\odot$ . V. Разреженные множества. VI. Объединения разреженных множеств. VII. Точки порядка $n$ . VIII. Понятие эффективности.	
§ 24. Мощность различных семейств множеств . . . . .	263
I. Семейства открытых множеств. Семейства множеств, обладающих свойством Бэра. II. Вполне упорядоченные монотонные семейства. III. Разложимые множества. IV. Производные множества порядка $\alpha$ . V. Логический анализ. VI. Семейства непре-	

	рывных функций. VII. Структура монотонных семейств замкнутых множеств. VIII. Строго монотонные семейства. IX. Связь строго монотонных семейств с непрерывными функциями. X. Строго монотонные семейства замкнутого порядкового типа.	
В.	Проблемы размерности . . . . .	282
§ 25.	Определения. Общие свойства . . . . .	282
	I. Определение размерности. II. Размерность подмножеств. III. Множество $E_{(n)}$ .	
§ 26.	Нульмерные пространства . . . . .	286
	I. База пространства. II. Теоремы редукции и отделимости. III. Теоремы об объединении нульмерных множеств. IV. Продолжение нульмерных множеств. V. Счетные пространства.	
§ 27.	Пространства размерности $n$ . . . . .	297
	I. Теоремы об объединении. II. Отделимость замкнутых множеств. III. Разложение $n$ -мерного пространства. Условие $D_n$ . IV. Продолжение $n$ -мерных множеств. V. Размерностное ядро. VI. Слабо $n$ -мерное пространство. VII. Семейства, определяющие размерность. VIII. Размерность прямого произведения. IX. Непрерывные и взаимно однозначные отображения $n$ -мерных пространств. X. Замечания по поводу теории размерности в применении к произвольным метрическим пространствам.	
§ 28.	Симплексы, комплексы, полиэдры . . . . .	314
	I. Определения. II. Топологическая размерность симплекса. III. Приложения к задаче о неподвижных точках. IV. Приложения к кубам $\mathcal{S}^n$ и $\mathcal{S}^{n_0}$ . V. Нерв системы множеств. VI. Отображения метрических пространств в полиэдры. VII. Аппроксимация непрерывных отображений отображениями $\kappa$ . VIII. Бесконечные комплексы и полиэдры. IX. Продолжение непрерывных функций.	
Г.	Счетные операции. Борелевские множества. $B$ -измеримые функции .	343
§ 29.	Нижний и верхний пределы . . . . .	343
	I. Нижний предел. II. Правила действий. III. Верхний предел. IV. Правила действий. V. Связь между пределами $L_i$ и $L_s$ . VI. Предел. VII. Относительные свойства. VIII. Обобщенная теорема Больцано — Вейерштрасса. IX. Пространство $(2^{\mathbb{X}})_L$ .	
§ 30.	Борелевские множества . . . . .	352
	I. Эквивалентность. II. Классификация борелевских множеств. III. Свойства классов $F_\alpha$ и $G_\alpha$ . IV. Двусторонние борелевские множества. V. Разложение борелевских множеств на непересекающиеся множества. VI. Знакопередающиеся ряды борелевских множеств. VII. Теоремы редукции и отделимости. VIII. Относительно двусторонние множества. IX. Предельное множество двусторонних множеств. X. Локально борелевские множества.	

$\mathcal{M}$ -операция Монтомгери. XI. Вычисление классов с помощью логических символов. XII. Приложения. XIII. Универсальные функции. XIV. Существование множеств класса  $\mathcal{G}_\alpha$  не являющихся множествами класса  $\mathcal{F}_\alpha$ . XV. Проблема эффективности.

§ 31.  $B$ -измеримые отображения . . . . . 382

I. Классификация. II. Необходимые и достаточные условия. III. Суперпозиция функций. IV. Сужения функций. V. Функции многих переменных. VI. Сложные функции. VII. График отображения  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ . VIII. Предел функций. IX. Аналитическое представление. X. Теоремы Бэра о функциях первого класса.

§ 32. Функции, обладающие свойством Бэра . . . . . 408

I. Определение. II. Необходимые и достаточные условия. III. Операции над функциями, обладающими свойством Бэра. IV. Функции, обладающие свойством Бэра в узком смысле. V. Связь с мерой Лебега.

ГЛАВА 3. ПОЛНЫЕ ПРОСТРАНСТВА . . . . . 415

§ 33. Определения. Общие свойства . . . . . 415

I. Определения. II. Сходимость и фундаментальные последовательности. III. Прямое произведение. IV. Пространство  $(2^{\mathcal{X}})_m$ . V. Функциональное пространство. VI. Полная метризация  $\mathcal{G}_\delta$ -множеств. VII. Пополнение метрического пространства.

§ 34. Последовательности множеств. Теорема Бэра . . . . . 422

I. Коэффициент  $\alpha(A)$ . II. Теорема Кантора. III. Приложение к непрерывным функциям. IV. Теорема Бэра [1]. V. Приложения к множествам типа  $\mathcal{G}_\delta$ . VI. Приложения к множествам типа  $\mathcal{F}_\sigma$  и  $\mathcal{G}_\delta$ . VII. Приложения к функциям первого класса. VIII. Приложения к теоремам существования.

§ 35. Продолжение функций . . . . . 432

I. Продолжение непрерывных функций. II. Продолжение гомеоморфизмов. III. Топологическая характеристика полных пространств. IV. Внутренняя инвариантность различных семейств множеств. V. Приложения к топологическим рангам. VI. Продолжение  $B$ -измеримых функций. VII. Продолжение гомеоморфизма класса  $(\alpha, \beta)$ .

§ 36. Связь полных сепарабельных пространств с пространством  $\mathcal{N}$  иррациональных чисел . . . . . 448

I.  $(\mathcal{A})$ -операция. II. Отображения множества  $\mathcal{N}$  в полные пространства. III. Взаимно однозначные отображения. IV. Теоремы разложения. V. Связь с канторовским множеством  $\mathcal{C}$ .

§ 37. Борелевские множества в полных сепарабельных пространствах	458
I. Связь борелевских множеств с пространством $\mathcal{A}^*$ . II. Характеризация борелевских классов множеств с помощью обобщенных гомеоморфизмов. III. Разложение двусторонних множеств в знакопередающиеся ряды. IV. Малые классы Бореля.	
§ 38. Проективные множества	464
I. Определения. II. Соотношения между проективными классами. III. Свойства проективных множеств. IV. Проекции. V. Универсальные функции. VI. Теорема существования. VII. Инвариантность. VIII. Проективные функции высказываний. IX. Инвариантность проективных классов относительно просеивания через решето и относительно $(\mathcal{A})$ -операции. X. Трансфинитная индукция. XI. Операции Хаусдорфа.	
§ 39. Аналитические множества	489
I. Общие теоремы. II. Аналитическое множество как результат $(\mathcal{A})$ -операции. III. Первая теорема отделимости. IV. Приложения к борелевским множествам. V. Приложения к $B$ -измеримым функциям. VI. Вторая теорема отделимости. VII. Порядок значения $B$ -измеримой функции. VIII. Составляющие, или конституанты. $CA$ -множества. IX. Проективные классы функций высказываний, включающих переменные порядковые типы. X. Теоремы редукции. XI. Функции классов $A$ и $CA$ .	
§ 40. Вполне несовершенные и другие сингулярные пространства	523
I. Вполне несовершенные пространства. II. Пространства заведомо первой категории. III. $\lambda$ -пространства. IV. Отображения. V. Свойство $\lambda'$ . VI. $\sigma$ -пространства. VII. $\nu$ -пространства, сосредоточенные пространства, свойство $C$ . VIII. Связь со свойством Бэра в узком смысле. IX. Связь $\nu$ -пространств с общей теорией множеств.	
ДОБАВЛЕНИЕ	543
I. Некоторые приложения топологии к математической логике.	
А. Мостовский	543
II. О приложениях топологии к функциональному анализу. Р. Сикорский	
Сикорский	548
Литература	552
Предметный указатель	580
Именной указатель	584